2024年度

⑤ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

(1) 不等式

$$|2x - 7| \leq 7 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 3x^2 - 5x - 7 > 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

について、①の解は

$$\boxed{\text{ア}} \leq x \leq \boxed{\text{イ}}$$

である。また、①と②をともに満たす整数 x は $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。

(2) $3x + y = 12$ のとき、 xy は

$$x = \boxed{\text{エ}}, \quad y = \boxed{\text{オ}} \text{ のとき最大値 } \boxed{\text{カキ}}$$

をとる。

また、 $3x + y = 12$, $x > 0$, $y > 0$ のとき、

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{y}\right) \text{ は最小値 } \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

をとる。

(3) 1から9までの番号のついた9枚のカードがある。この中から3枚のカードを取り出すとき

3枚のカードの数の積が奇数となる確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$

である。また,

3枚のカードの数の積が4の倍数となる確率は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$

である。

第2問 (配点 25)

- (1) $a = \log_{10}\left(1 - \frac{1}{50}\right)$, $b = \log_{10}\left(1 - \frac{1}{8}\right)$ とするとき, $\log_{10}2$, $\log_{10}7$ を a , b で表すと

$$\log_{10}2 = \frac{a - \boxed{\text{ア}} b + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},$$

$$\log_{10}7 = \frac{\boxed{\text{エ}} a + b + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

- (2) 関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ に対し, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(2, 3)$ における接線を l とする。 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{キ}} x - \boxed{\text{ク}}$$

である。また, 曲線 $y = f(x)$ と l で囲まれる部分の面積を S とおくと,

$$S = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。 $b_n = a_n + 3 \cdot 2^{n-1}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は公比 $\boxed{\text{シ}}$ の等比数列であり、 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ス}} \cdot \boxed{\text{セ}}^{n-1} - \boxed{\text{ソ}} \cdot \boxed{\text{タ}}^{n-1}$$

である。また、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \boxed{\text{チ}} \cdot \boxed{\text{ツ}}^n - \boxed{\text{テ}} \cdot \boxed{\text{ト}}^n + \boxed{\text{ナ}}$$

である。

第3問 (配点 25)

$0 \leq \theta \leq \pi$ で定義された関数

$$f(\theta) = \cos 2\theta + 2\cos\theta - 1$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ は

最大値 , 最小値

イウ
エ

をとり、最小値をとるときの θ の値は

$$\theta = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \pi$$

である。

(2) 関数 $g(\theta)$ を $g(\theta) = (\cos\theta)f(\theta) + 2$ とおく。 $g(\theta)$ は

最大値 , 最小値

クケ
コサ

をとり、最小値をとるときの $\cos\theta$ の値は

$$\cos\theta = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}$$

である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

第4問 (配点 25)

平面上に4点O, A, B, Cがあり,

$$|\overrightarrow{OA}| = 3, \quad |\overrightarrow{OB}| = 4, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 8$$

が成り立つとする。

(1) 三角形OABにおいて,

$$\cos \angle AOB = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \triangle OAB = \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。また, 点Oから直線ABに下ろした垂線と直線ABの交点をHとすると,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \overrightarrow{OB}$$

である。

(2) ベクトル $\vec{OC}$ を

$$\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB} \quad (x, y \text{ は実数の定数})$$

とおく。 $\vec{OC} \cdot \vec{OA} = 12$ のとき、

$$\boxed{\text{ケ}} x + \boxed{\text{コ}} y = 12$$

が成り立つ。さらに、 $\vec{OC} \cdot \vec{OB} = 16$ のとき、

$$x + \boxed{\text{サ}} y = \boxed{\text{シ}}$$

が成り立ち、

$$\vec{OC} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \vec{OB}$$

である。さらに、点Cから直線ABに下ろした垂線と直線ABの交点をPとすると、

$$\vec{OP} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \vec{OB}$$

である。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
イ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ウ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ク	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ケ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\text{コサ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。