

2024年度

④ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

- (1) $x = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$, $y = \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ のとき,

$$x^2 + y^2 = \boxed{\text{ア}}, \quad xy = \boxed{\text{イ}}, \quad x + y = \sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である。

- (2) 正の実数 x, y が $x^2 + 2y^2 = 1$ を満たすとき, $x + 3y^2$ は

$$x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \quad y = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \quad \text{のとき最大値} \quad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

をとる。

(3) 袋Aには赤玉6個, 白玉3個が入っていて, 袋Bには赤玉2個, 白玉2個が入っている。袋Aから1つの玉を取り, 赤白を確認した後その玉を袋Bに入れ, 次に, 袋Bから1つの玉を取り, 赤白を確認した後その玉を袋Aに入れる。これを1回の試行とする。1回の試行の後,

袋Aに赤玉6個, 白玉3個入っている確率は

サ
シ

である。また, 2回の試行の後,

袋Aに赤玉6個, 白玉3個入っている確率は

スセ
ソタ

である。

第2問 (配点 25)

- (1) a, b を実数の定数とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 20 = 0$ が $x = 1 + 3i$ を解にもつとき、

$$a = \boxed{\text{アイ}}, \quad b = \boxed{\text{ウエ}}$$

であり、実数解は

$$x = \boxed{\text{オ}}$$

である。ただし、 i は虚数単位である。

- (2) a を 1 より大きい定数とし、関数

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 + 12 \quad (1 \leq x \leq a)$$

を考える。 $f(x)$ の最小値が 7 のとき、 a の値は

$$a = \boxed{\text{カ}}$$

である。また、 $f(x)$ の最小値が 3、最大値が 12 のとき、 a の値の範囲は

$$\boxed{\text{キ}} \leq a \leq \boxed{\text{クケ}}$$

をとる。

- (3) 三角形ABCにおいて、辺ABを1:2に内分する点をD、辺ACを3:1に内分する点をEとし、線分BEと線分CDの交点をPとする。ベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表すと、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \overrightarrow{AC}$$

である。また、三角形PBCと三角形ABCの面積の比は

$$\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

第3問 (配点 25)

3次関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ について,

- (1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 - \boxed{\text{イウ}} x + \boxed{\text{エ}}$$

である。

- (2) 関数 $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

で極大値

$$\boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

をとる。

- (3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 A(0, 5) における接線を l とし, 点 A を通り, A と異なる点で曲線 $y = f(x)$ と接する接線を m とする。このとき, 接線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{コ}} x + \boxed{\text{サ}},$$

接線 m の方程式は

$$y = \boxed{\text{シス}} x + \boxed{\text{セ}}$$

である。

(4) (3)の m について，曲線 $y = f(x)$ と m で囲まれた部分の面積を S とおくと，

$$S = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

第4問 (配点 25)

数列 $\{a_n\}$ は等差数列, 数列 $\{b_n\}$ は等比数列で

$$a_2 = b_3 = 12, \quad a_6 = b_4 = 24$$

が成り立つ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の公差を d , 一般項を a_n とすると,

$$d = \boxed{\text{ア}}, \quad a_n = \boxed{\text{イ}}n + \boxed{\text{ウ}}$$

である。また, 数列 $\{b_n\}$ の公比を r , 一般項を b_n とすると,

$$r = \boxed{\text{エ}}, \quad b_n = \boxed{\text{オ}} \cdot \boxed{\text{カ}}^{n-1}$$

である。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}n^2 + \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}n,$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \boxed{\text{シ}} \cdot \boxed{\text{ス}}^n - \boxed{\text{セ}}$$

である。

(3) 数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = \boxed{\text{ソ}} - \frac{n + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}^{n-1}}$$

である。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(－, 土), 数字(0～9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に－83 と答えたいとき

ア	☒ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
イ	☐ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐ 8 ☐ 9
ウ	☐ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。
符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 キク
ケ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	☒ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
ク	☐ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
ケ	☐ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, コ $\sqrt{\text{サ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところ
を, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。