

2024年度

③ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから8ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

(1) $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ について

$$x + y = \boxed{\text{ア}}, \quad x^2 + y^2 = \boxed{\text{イウ}}$$

である。また、 $x^3 - ax^2y - axy^2 + y^3 = 0$ のとき、定数 a の値は

$$a = \boxed{\text{エオ}}$$

である。

(2) $0 \leq x \leq 3$ で定義された関数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ は

$$\text{最大値 } \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad \text{最小値 } \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

をとる。

(3) 円に内接する四角形ABCDにおいて、 $AB = 2$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 5$ とする。

$\cos \angle BAD$ の値と、対角線BDの長さは

$$\cos \angle BAD = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}, \quad BD = \sqrt{\boxed{\text{シス}}}$$

である。また、四角形ABCDの面積を S とおくと、

$$S = \boxed{\text{セ}} \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

第2問 (配点 25)

(1) $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。関数

$$f(\theta) = \cos 2\theta + 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\theta + 5$$

について,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\text{ア}}$$

である。また、 $f(\theta)$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \leq f(\theta) \leq \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

(2) x についての不等式

$$\log_a(6-x) - \log_a(x-3) > \log_a 2 - \log_a(x-1)$$

の解は

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}},$$

$$1 < a \text{ のとき } \boxed{\text{ケ}} < x < \boxed{\text{コ}}$$

である。

(3) $\triangle ABC$ で $AB = 4$, $BC = \sqrt{6}$, $CA = 2\sqrt{2}$ とする。 \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} の内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の値は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \boxed{\text{サ}}$$

である。また、 $\triangle ABC$ の重心を G とおくと、線分 CG の長さは

$$CG = \frac{\boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

第3問 (配点 25)

a, b を実数の定数とする。関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 15x + b$ が次の条件を満たしているとする。

(i) 導関数のグラフ $y = f'(x)$ は直線 $x = \frac{7}{3}$ を軸とする放物線である。

(ii) $f(x)$ は極小値 0 をとる。

(1) 条件(i)より,

$$a = \boxed{\text{アイ}}$$

であり, $f(x)$ は

$$x = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \text{ で極大値, } x = \boxed{\text{オ}} \text{ で極小値}$$

をとる。さらに, 条件(ii)より

$$b = \boxed{\text{カキ}}$$

である。

- (2) 座標平面の原点から曲線 $y = f(x)$ へは3本の接線を引くことができる。その接線の方程式を

$$y = a_1x, \quad y = a_2x, \quad y = a_3x \quad (a_1 < a_2 < a_3)$$

とおくと,

$$a_1 = \boxed{\text{ク}}, \quad a_2 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}, \quad a_3 = \boxed{\text{サシ}}$$

である。

- (3) (2)の直線 $y = a_1x$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S とおくと,

$$S = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

第4問 (配点 25)

A, Bの2人が硬貨を投げる。ただし, Aは4回, Bは5回投げるものとする。

(1) Aが表を3回出し, かつ, Bが表を2回出す確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(2) Aが表を3回出す, または, Bが表を2回出す確率は $\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(3) Aが表を出す回数よりも, Bが表を出す回数の方が多い確率は $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(4) AとBが表を同じ回数出す確率は $\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である。また, AとBが表を同じ回数

出したとき, Aが2回以上続けて表を出している条件付き確率は $\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 キク / ケ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, コ $\sqrt{\text{サ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。