

2023年度

④ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから8ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全問必答)

第1問 (配点 25)

(1) a を実数の定数とする。 x についての2次不等式

$$x^2 - 8x + 12 > 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 - (2a+1)x + a(a+1) < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

について、①の解は

$$x < \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} < x$$

である。また、①、②を同時に満たす x が存在しない a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ウ}} \leq a \leq \boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ のとき,

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}, \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(3) A, B, C, D, E, Fの6文字を円形に並べるとき

AとBが隣り合う並べ方は

コサ

 通り,

AとBが向かい合う並べ方は

シス

 通り

である。ただし、回転して一致する並べ方は同じ並べ方と考える。

第2問 (配点 25)

- (1) 2次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の2解を α , β とおく。このとき,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{アイ}}$$

であり, α^2 , β^2 , -1 を解にもつ3次方程式は

$$x^3 + \boxed{\text{ウ}}x^2 + \boxed{\text{エオ}}x + \boxed{\text{カ}} = 0$$

である。

- (2) $f(x) = \log_2(x-2) + \log_2(12-x)$ とする。関数 $f(x)$ の定義域は

$$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{クケ}}$$

である。また, 関数 $f(x)$ の最大値を M とおくと,

$$M = \boxed{\text{コ}} \log_2 \boxed{\text{サ}} \iff 2^M = \boxed{\text{シス}}$$

である。

(3) 平面上に三角形ABCと点Pがあり、 $4\vec{PA} + 3\vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ が成り立っている。

\vec{AP} を \vec{AB} と \vec{AC} で表すと、

$$\vec{AP} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \vec{AC}$$

である。したがって、三角形PBCの面積は

$$\triangle PBC = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \triangle ABC$$

である。

第3問 (配点 25)

関数 $f(x) = (x - 3)^2$ とする。

(1) $F(x) = xf(x)$ とおく。関数 $F(x)$ の導関数は

$$F'(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 - \boxed{\text{イウ}} x + \boxed{\text{エ}}$$

であり、 $F(x)$ は

$$x = \boxed{\text{オ}} \text{ で極大値, } x = \boxed{\text{カ}} \text{ で極小値}$$

をとる。また、2つの曲線 $y = f(x)$, $y = F(x)$ で囲まれた図形の面積を S_1 とおくと、

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とし、関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f'(x) + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 tf'(t)dt$$

と定める。このとき、

$$g(x) = \boxed{\text{ケ}}x - \boxed{\text{コ}}$$

である。2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の交点の x 座標は

$$x = \boxed{\text{サ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

であり、この2曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を S_2 とおくと、

$$S_2 = \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

第4問 (配点 25)

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が

$$S_n = 3n^2 + 6n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしている。

(1) $a_1 = \boxed{\text{ア}}$ であり, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{イ}}n + \boxed{\text{ウ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

(2) すべての自然数 n に対して,

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k} - a_{2k-1}) = \boxed{\text{エ}}n,$$

$$\sum_{k=1}^n ka_k = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n(n + \boxed{\text{キ}})(\boxed{\text{ク}}n + \boxed{\text{ケ}}),$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n}{\boxed{\text{コサ}}n + \boxed{\text{シス}}}$$

が成り立つ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ が 2 以上になる最小の自然数 n の値は $n = \boxed{\text{セソ}}$ である。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 キク / ケ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, コ $\sqrt{\text{サ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。