

2023年度

④ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから8ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
  - ① 氏名欄  
氏名・フリガナを記入しなさい。
  - ② 受験番号欄  
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

# 数 学

(全 問 必 答)

## 第1問 (配点 25)

(1)  $a$  を実数の定数とする。  $x$  についての2次不等式

$$x^2 - 8x + 12 > 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 - (2a+1)x + a(a+1) < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

について、 $\textcircled{1}$ の解は

$$x < \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} < x$$

である。また、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を同時に満たす  $x$  が存在しない  $a$  の値の範囲は

$$\boxed{\text{ウ}} \leq a \leq \boxed{\text{エ}}$$

である。

(2)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 、 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$  のとき、

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}, \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(3) A, B, C, D, E, Fの6文字を円形に並べるとき

AとBが隣り合う並べ方は 

コサ
----

 通り,

AとBが向かい合う並べ方は 

シス
----

 通り

である。ただし、回転して一致する並べ方は同じ並べ方と考える。

## 第2問 (配点 25)

- (1) 2次方程式  $x^2 - 2x + 3 = 0$  の2解を  $\alpha$ ,  $\beta$  とおく。このとき,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{アイ}}$$

であり,  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $-1$  を解にもつ3次方程式は

$$x^3 + \boxed{\text{ウ}}x^2 + \boxed{\text{エオ}}x + \boxed{\text{カ}} = 0$$

である。

- (2)  $f(x) = \log_2(x-2) + \log_2(12-x)$  とする。関数  $f(x)$  の定義域は

$$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{クケ}}$$

である。また, 関数  $f(x)$  の最大値を  $M$  とおくと,

$$M = \boxed{\text{コ}} \log_2 \boxed{\text{サ}} \iff 2^M = \boxed{\text{シス}}$$

である。

(3) 平面上に三角形ABCと点Pがあり、 $4\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$  が成り立っている。

$\overrightarrow{AP}$  を  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  で表すと、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \overrightarrow{AC}$$

である。したがって、三角形PBCの面積は

$$\triangle PBC = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \triangle ABC$$

である。

### 第3問 (配点 25)

関数  $f(x) = (x - 3)^2$  とする。

(1)  $F(x) = xf(x)$  とおく。関数  $F(x)$  の導関数は

$$F'(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 - \boxed{\text{イウ}} x + \boxed{\text{エ}}$$

であり、 $F(x)$  は

$$x = \boxed{\text{オ}} \text{ で極大値, } x = \boxed{\text{カ}} \text{ で極小値}$$

をとる。また、2つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = F(x)$  で囲まれた図形の面積を  $S_1$  とおくと、

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(2)  $f(x)$ の導関数を  $f'(x)$ とし、関数  $g(x)$ を

$$g(x) = f'(x) + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t f'(t) dt$$

と定める。このとき、

$$g(x) = \boxed{\text{ケ}} x - \boxed{\text{コ}}$$

である。2つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ の交点の  $x$ 座標は

$$x = \boxed{\text{サ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

であり、この2曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を  $S_2$ とおくと、

$$S_2 = \boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

## 第4問 (配点 25)

数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和  $S_n$  が

$$S_n = 3n^2 + 6n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしている。

(1)  $a_1 =$   であり, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n =$$
   $n +$    $(n = 1, 2, 3, \dots)$

である。

(2) すべての自然数  $n$  に対して,

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k} - a_{2k-1}) =$$
   $n,$

$$\sum_{k=1}^n ka_k = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} n (n + \text{キ}) (\text{ク}n + \text{ケ}),$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n}{\text{コサ}n + \text{シス}}$$

が成り立つ。

(3) 和  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$  が2以上になる最小の自然数  $n$  の値は  $n =$   である。



(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

## 〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 キク / ケ に  $-\frac{4}{5}$  と答えたいときは,  $\frac{-4}{5}$  として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, コ  $\sqrt{\text{サ}}$  ,  $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$  に  $4\sqrt{2}$  ,  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  と答えるところを,  $2\sqrt{8}$  ,  $\frac{\sqrt{52}}{4}$  のように答えてはいけません。