# 2023年度

# ⑥ 数　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから９ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

**氏名・フリガナ**を**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

**受験番号**(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

**解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

# 数　　学

## （全　問　必　答）

## 第1問 （配点　25）

(1)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とおくと，

$$a = \boxed{\text{ア}},\quad b^2 + \frac{1}{b^2} = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

(2)　2次関数 $y = x^2 - 6x + a$ のグラフが $x$ 軸と異なる2点で交わるとき，定数 $a$ の値の範囲は

$$a < \boxed{\text{エ}}$$

である。さらに，その2点の $x$ 座標が1より大きいとき，$a$ の値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}} < a < \boxed{\text{カ}}$$

である。

(3)　△ABCにおいて，

$$\mathrm{BC} = 4,\quad \mathrm{AB} = 3\mathrm{AC},\quad \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{3}{5}$$

とする。△ABCの外接円の半径を$R$とおくと，

$$R = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，辺ACの長さと△ABCの面積は

$$\mathrm{AC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \triangle\mathrm{ABC} = \boxed{\text{シ}}$$

である。

## 第2問 （配点　25）

(1)　$\log_2 x + \log_2 y = \log_2(2x + 3y)$を満たす自然数 $x$，$y$ の組は $\boxed{\text{ア}}$ 組あり，このうち $xy$ が最大になる組は

$$(x,\ y) = \left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

(2)　座標平面上の円$C$：$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ の中心をA，半径を $r$ とすると，

$$\mathrm{A}\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right),\quad r = \sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。また，$C$ が直線 $y = mx - 1$（$m > 0$）と接するとき，

$$m = \boxed{\text{ク}}$$

である。

(3)　平面上の三角形OABにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。$|\vec{a}| = 4$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ のとき，三角形OABの面積は

$$\triangle\mathrm{OAB} = \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

である。また，$\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a} + k\vec{b}$ が垂直になる実数 $k$ の値は

$$k = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

## 第3問 （配点　25）

2次関数 $f(x)=-x^2-2x+4$ に対して，グラフ $y=f(x)$ を $C$ とおく。

(1)　$C$ 上の点 $(1,\ 1)$ をAとする。点Aを通り，$C$ のAにおける接線に直交する直線の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(2)　$C$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は

$$x=\boxed{\text{オカ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$

であり，$C$ と $x$ 軸で囲まれた図形の面積を $S$ とおくと，

$$S=\frac{\boxed{\text{クケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(3) 点Oを原点とする座標平面上に2点P$(t,\ f(t))$，Q$(0,\ f(t))$をとり，三角形OPQの面積を$S(t)$とおく。ただし，Pは第1象限の点とする。このとき，$t$の関数$S(t)$の導関数は

$$S'(t)=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(t+\boxed{\text{ソ}}\right)\left(\boxed{\text{タ}}\,t-\boxed{\text{チ}}\right)$$

であり，$S(t)$は

$$t=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\quad \text{のとき最大値}\quad \frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$$

をとる。

## 第4問 （配点　25）

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が，$a_1 = 7$，$b_1 = 4$ および

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義されている。

(1)　$a_2 - b_2 = \boxed{\text{ア}}$，$a_3 - b_3 = \boxed{\text{イウ}}$ である。

(2)　数列 $\{a_n - b_n\}$ は公比 $\boxed{\text{エ}}$ の等比数列であり，数列 $\{a_n - b_n\}$ の一般項は

$$a_n - b_n = \boxed{\text{オ}} \cdot \boxed{\text{カ}}^{\,n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(3)　$p$ を正の定数とする。数列 $\{a_n + pb_n\}$ が等比数列であるとき，$p$ の値は

$$p = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，数列 $\{a_n + pb_n\}$ の一般項は

$$a_n + pb_n = \boxed{\text{ケ}} \cdot \boxed{\text{コ}}^{\,n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(4)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ は

$$S_n = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \cdot \boxed{\text{ス}}^{\,n} + \boxed{\text{セ}}^{\,n} - \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

## 〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(−，±)，数字(0〜9)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

**例1**　$\boxed{\text{アイウ}}$ に−83と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | ● | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| イ | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ● | 9 |
| ウ | − | ± | 0 | 1 | 2 | ● | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

**例2**　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| キ | ● | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ク | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | ● | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ケ | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ● | 6 | 7 | 8 | 9 |

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。