

2023年度

⑤ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから7ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全問必答)

第1問 (配点 25)

(1) $x = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ のとき,

$$x^2 + y^2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad x^3 + y^3 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(2) 方程式

$$(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 5) + 2 = 0$$

の異なる実数解は $\boxed{\text{オ}}$ 個あり, そのうち最大の解は $x = \boxed{\text{カ}}$ である。

(3) 2次関数 $y = -x^2 + 6x$ の $a \leq x \leq a + 2$ における最大値が9のとき, 定数 a の値の範囲は

$$\boxed{\text{キ}} \leq a \leq \boxed{\text{ク}}$$

である。

(4) 袋の中に赤玉2個，白玉1個が入っている。この袋から1個の玉を取り出し，色を確認して袋の中へ戻すという試行を行う。この試行を3回行うとき，

3回続けて同じ色の玉が出る確率は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である。また，4回行うとき，

赤玉と白玉が2回ずつ出る確率は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$

である。

第2問 (配点 25)

- (1) 等式 $\frac{a+5i}{4+i} = 1+bi$ を満たす実数 a, b の値は

$$a = \boxed{\text{ア}}, \quad b = \boxed{\text{イ}}$$

である。ただし、 i は虚数単位である。

- (2) $\tan\theta = \frac{1}{3}$ のとき、

$$\tan 2\theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad \tan 3\theta = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

- (3) 連立方程式 $\log_2 x + 1 = \log_3 y, \quad xy = 108$ の解は

$$(x, y) = (\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケコ}})$$

である。

- (4) a, b を整数とする。数列 $4, a, b$ が等差数列であり、数列 $a, b, 18$ が等比数列であるとき、 a, b の値は

$$a = \boxed{\text{サ}}, \quad b = \boxed{\text{シス}}$$

である。

第3問 (配点 25)

3次関数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ を考える。

(1) $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{ア}} \text{ で極大値 } \boxed{\text{イウ}},$$

$$x = \boxed{\text{エ}} \text{ で極小値 } \boxed{\text{オカ}}$$

をとる。

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{キ}}x + \boxed{\text{ク}}$$

である。 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、曲線 $y = f(x)$ と l 、および y 軸で囲まれた領域の面積 S_1 の値は

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。また、曲線 $y = f(x)$ と l の交点の x 座標は

$$x = 1 \quad \text{および} \quad x = \boxed{\text{サ}}$$

であり、曲線 $y = f(x)$ と l で囲まれた領域の面積 S_2 の値は

$$S_2 = \boxed{\text{シス}} S_1$$

を満たす。

第4問 (配点 25)

座標空間に3点 $A(2, 4, 6)$, $B(4, 2, 6)$, $C(5, 3, 2)$ がある。

(1) 3点 A , B , C について,

$$|\overline{AB}| = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$$

であり, \overline{AB} と \overline{AC} の内積の値は,

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \boxed{\text{オ}}$$

である。したがって, 三角形 ABC の面積を S とおくと,

$$S = \boxed{\text{カ}}$$

である。

(2) 3点 A, B, C で定められた平面に原点 O から垂線 OP を下ろす。

点 P の位置ベクトルを

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \text{ は実数})$$

とおく。 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから,

$$\boxed{\text{キ}}s + \boxed{\text{ク}}t = 1, \quad \boxed{\text{ケ}}s + \boxed{\text{コサ}}t = 11$$

であり,

$$\overrightarrow{OP} = (\boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}})$$

である。したがって、四面体 OABC の体積を V とおくと,

$$V = \boxed{\text{ソタ}}$$

である。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 キク / ケ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, コ $\sqrt{\text{サ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。