

2021年度

④ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
  - ① 氏名欄  
氏名・フリガナを記入しなさい。
  - ② 受験番号欄  
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

# 数 学

(全 問 必 答)

## 第1問 (配点 25)

(1)  $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$  ( $x > 0$ ) のとき,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \boxed{\text{ア}}, \quad x + \frac{1}{x} = \boxed{\text{イ}}, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2)  $a, b$  を実数の定数,  $i$  を虚数単位とする。3次方程式

$$x^3 - 2ax^2 + 7ax - b = 0 \cdots \cdots (*)$$

において,  $x = 2 - 3i$  が解であるとき,  $a, b$  値と(\*)の実数解  $\alpha$  の値は

$$a = \boxed{\text{オ}}, \quad b = \boxed{\text{カキ}}, \quad \alpha = \boxed{\text{ク}}$$

である。

(3) 1から10までの数字をひとつずつ書かれた10枚のカードがある。この中から無作為に3枚のカードを取り出して、書かれた数の最大値を $X$ とする。このとき、

$$X \leq 7 \text{ となる確率は } \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

であり、

$$X = 7 \text{ となる確率は } \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

## 第2問 (配点 25)

(1)  $\tan\theta = 3$  のとき,

$$\sin 2\theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \cos 4\theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

である。

(2) 連立方程式  $\begin{cases} 2^x = y + 3 \\ x + 1 = 2\log_2(y - 1) \end{cases}$  の解は

$$x = \boxed{\text{カ}}, \quad y = \boxed{\text{キ}}$$

である。

(3)  $a_1 = 10$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ク}} \cdot \boxed{\text{ケ}}^n - \boxed{\text{コ}}$$

であり,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \boxed{\text{サ}} \cdot \boxed{\text{シ}}^{n+1} - \boxed{\text{ス}}n - \boxed{\text{セ}}$$

である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

### 第3問 (配点 25)

$a$  を実数の定数とする。関数

$$f(x) = x^2 - 6, \quad g(x) = -x^2 + 2ax - 4a$$

に対して、 $xy$  平面上的グラフ  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  をそれぞれ  $C_1$ ,  $C_2$  とする。

(1)  $C_1$  と  $C_2$  が共有点をもつ  $a$  の値の範囲は

$$a \leq \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} \leq a$$

である。

(2)  $a = \boxed{\text{イ}}$  とする。

(i)  $C_1$  と  $C_2$  の共有点の座標は

$$\left( \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}} \right)$$

であり、 $C_1$ ,  $C_2$  および  $y$  軸で囲まれた部分の面積を  $S$  とすると、

$$S = \boxed{\text{オカ}}$$

である。

(ii)  $C_1$  と  $C_2$  の共通接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{キ}}x - \boxed{\text{クケ}}$$

である。

(3)  $C_1$ と $C_2$ が異なる2つの共有点をもつとし、その2点の中点をMとする。Mの座標を $(X, Y)$ とおくと、

$$X = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} a, \quad Y = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} a^2 - \boxed{\text{セ}} a - \boxed{\text{ソ}}$$

である。したがって、点Mの軌跡は

$$y = \boxed{\text{タ}} x^2 - \boxed{\text{チ}} x - \boxed{\text{ツ}} \quad (x < \boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}} < x)$$

である。

## 第4問 (配点 25)

平面上に三角形ABCがあり、外接円の中心をOとすると、

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} &= \vec{0}, \\ |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

が成り立つとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ の内積の値は、それぞれ

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{\text{ア}}, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\boxed{\text{イ}}, \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -\boxed{\text{ウ}}$$

であり、三角形ABCの面積は

$$\triangle ABC = \boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) 三角形ABCの重心をGとおくと、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

より、 $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ で表すと、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}} \overrightarrow{OB}$$

である。また、直線OGとABの交点をPとおくと、

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, \quad \frac{OG}{OP} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

## 〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2  $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$  に  $-\frac{4}{5}$  と答えたいときは,  $\frac{-4}{5}$  として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば,  $\sqrt{\text{コサ}}$  ,  $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$  に  $4\sqrt{2}$  ,  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  と答えるところを,  $2\sqrt{8}$  ,  $\frac{\sqrt{52}}{4}$  のように答えてはいけません。