

2016年度

③ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから7ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全問必答)

第1問 (配点 25)

(1) $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{3}$, $y = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$ のとき,

$$x^2 + y^2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2) $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x + 3$ を $\sin x$ で表すと

$$f(x) = \boxed{\text{オカ}} \left(\sin x - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \right)^2 + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

であり, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ において $f(x)$ が最大値をとる x の値は $\boxed{\text{サ}}$ 個ある。

(3) 初項 $a_1 = 40$, 公差 -6 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{シス}} - \boxed{\text{セ}} n$$

であり, 初項から第 n 項までの和がはじめて負となる n の値は

$$n = \boxed{\text{ソタ}}$$

である。

第2問 (配点 25)

座標平面上に放物線 $C : y = \frac{1}{6}x^2$ がある。 C 上の点 $P \left(t, \frac{1}{6}t^2 \right) (t > 0)$ を通り、 P における C の接線に垂直な直線を l とする。 l と C の P と異なる交点を Q とする。

(1) l の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{t}x + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}t^2 + \boxed{\text{エ}}$$

であり、点 Q の x 座標は $-t - \frac{\boxed{\text{オカ}}}{t}$ である。

(2) C と l で囲まれた領域 D の面積を S_0 とおくと

$$S_0 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \left(t + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{t} \right)^3$$

である。

(3) (2)において、 S_0 が最小となるときの t の値は

$$t = \boxed{\text{コ}}$$

である。このとき、領域 D の $x \geq 0$ の部分の面積を S_1 、 $x \leq 0$ の部分の面積を S_2 とおくと

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$$

である。

第3問 (配点 25)

赤玉 1 個, 青玉 2 個, 白玉 6 個, 合計 9 個の玉があり, 同色の玉は区別できないものとする。

(1) 9 個の玉を一行に並べるとき, 並べ方は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。このうち, 2 個の青玉が連続しない並べ方は $\boxed{\text{エオカ}}$ 通り, 赤玉と青玉が隣り合わない並べ方は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある。

(2) 9 個の玉を袋に入れ, その中から 3 個の玉を取り出すとき, 3 個とも白玉を取り出す確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$, 赤玉, 青玉, 白玉を 1 個ずつ取り出す確率は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(3) 9 個の玉を 3 つの袋に 3 個ずつ入れるとき, 赤玉と青玉が同じ袋に入らない確率は $\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

第4問 (配点 25)

三角形 OAB において

$$OA = 4, OB = 3, \cos \angle AOB = \frac{1}{3}$$

とする。

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ の値と三角形 OAB の面積は

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \boxed{\text{ア}}, \triangle OAB = \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

- (2) 辺 OA を 1 : 3 に内分する点を C, 線分 BC を $k : (1 - k)$ ($0 < k < 1$) に内分する点を P とおくと

$$\vec{OP} = \frac{k}{\boxed{\text{エ}}} \vec{OA} + \left(\boxed{\text{オ}} - k \right) \vec{OB}$$

である。さらに、直線 OP と AB の交点を Q とすると

$$\vec{OQ} = \frac{k}{\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}} k} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{ケ}} k}{\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}} k} \vec{OB}$$

である。

(3) (2)において、 $OQ \perp AB$ のとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB}$ と k の値は

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = \boxed{\text{シ}}, k = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

であり、三角形 OPC と三角形 BPQ の面積の比は

$$\frac{\triangle OPC}{\triangle BPQ} = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

である。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の **ア** , **イウ** などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**, **イ**, **ウ**, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 **アイウ** に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。