2015年度

⑥　数　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから７ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問 (配点　25)

(1)　$x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ について

$$x + y = \boxed{\text{ア}},\quad x^2 + y^2 = \boxed{\text{イウ}}$$

である。また，定数 a が $x^3 - ax^2y - axy^2 + y^3 = 0$ を満たすとき，a の値は

$$a = \boxed{\text{エオ}}$$

である。

(2)　赤玉 6 個，白玉 4 個，合計 10 個の玉がある。これらの 10 個の玉を横一列に並べるとき，

両端が赤玉である確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$

また，10 個の玉から 3 個を取り出すとき，

2 個が赤玉，1 個が白玉である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

である。

(3)　数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n - 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする。このとき，一般項 a_n および，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$a_n = \boxed{\text{コ}} \cdot \boxed{\text{サ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{シ}},$$

$$S_n = \boxed{\text{ス}}^{\,n} + \boxed{\text{セ}}\,n - \boxed{\text{ソ}}$$

である。また，S_n が 1000 より大きくなる最小の自然数 n は $\boxed{\text{タ}}$ である。

第２問 （配点　25）

座標平面に２円

$$\mathrm{O}_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$
$$\mathrm{O}_2 : (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

がある。ただし，p，q，r は実数で $p > 1$，$r > 0$ とする。

(1)　O_1 の中心を A，半径を r_1 とおくと

$$\mathrm{A}\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right),\quad r_1 = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2)　a を $a > 1$ を満たす定数とする。直線 $x + y = a$ が O_1 に接するとき，接点を B とおくと

$$a = \boxed{\text{エ}},\quad \mathrm{B}\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。このとき，直線 $x + y = a$ と y 軸との交点を C，O_1 と y 軸との交点のうち y 座標が大きい方の点を D とおく。線分BC，CD および弧 BD(短い方の弧)で囲まれた図形の面積を S とおくと

$$S = \boxed{\text{キ}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$$

である。

(3)　(2)において，O_1 と O_2 が点 B で外接するとき，

$$q = p + \boxed{\text{コ}},\ r = \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\left(p - \boxed{\text{シ}}\right)$$

である。さらに，O_2 が y 軸と接するとき，

$$p = \boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

第3問 （配点　25）

関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ を考える。

(1)　$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\,x^2-\boxed{\text{イウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}$$

であり，$f(x)$ の極値は

$$\text{極大値}：f\left(\boxed{\text{オ}}\right)=\boxed{\text{カ}}，\quad \text{極小値}：f\left(\boxed{\text{キ}}\right)=\boxed{\text{ク}}$$

である。

(2)　a を実数の定数とする。区間 $a \leqq x \leqq a+1$ において $f(x)$ が最大値 4 をとる a の値の条件は

$$\boxed{\text{ケ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{コ}}，\quad a=\boxed{\text{サ}}$$

である。

(3)　b を実数の定数として

$$F(b)=\int_b^{b+1}\{\,f'(x)-6x+24\,\}\,dx$$

とおくと，

$$F(b)=\boxed{\text{シ}}\,b^2-\boxed{\text{スセ}}\,b+\boxed{\text{ソタ}}$$

であり，$F(b)$ は

$$b=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\quad \text{のとき最小値}\quad \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

をとる。

第4問 （配点　25）

四面体 OABC において，辺 AB を 3：1 に内分する点を D，線分 CD の中点を E とおく。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ で表すと

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{OB} + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{OC}$$

である。

(2) 座標空間において O(0，0，0)，A(4，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，3)とすると

$$\mathrm{E}\left(\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right),\quad \mathrm{OE} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

(3) 座標空間において O(0，0，0)，A(a，0，0)，B(0，b，0)，C(0，0，c)とおく。ただし，a，b，c は正の定数とする。$\overrightarrow{OE}$ と平面 ABC が直交するとき

$$a = \sqrt{\boxed{\text{テ}}}\,b = \boxed{\text{ト}}\,c$$

が成り立つ。とくに $a = 12$ のとき，線分 OE の長さと三角形 ABC の面積は

$$\mathrm{OE} = \boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}},\quad \triangle \mathrm{ABC} = \boxed{\text{ヌネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(−，±)，数字(0～9)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に−83と答えたいとき

ア	● ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
イ	− ± 0 1 2 3 4 5 6 7 ● 9
ウ	− ± 0 1 2 ● 4 5 6 7 8 9

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	● ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ク	− ± 0 1 2 3 ● 5 6 7 8 9
ケ	− ± 0 1 2 3 4 ● 6 7 8 9

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。