2015年度

④　数　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから６ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　学

（全　問　必　答）

第1問　（配点　25）

(1)　x，y，z（$xyz \neq 0$）が $\dfrac{x+y}{7} = \dfrac{y+z}{8} = \dfrac{z+x}{9}$　のとき

$$x : y : z = \boxed{\text{ア}} : \boxed{\text{イ}} : \boxed{\text{ウ}}$$

であるから

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

(2)　a を実数の定数とする。x に関する2次方程式 $x^2 - 2ax + 2a^2 - 10 = 0$ について

(i)　ひとつの解は2より小さく，他の解は2より大きい a の値の範囲は
$\boxed{\text{キク}} < a < \boxed{\text{ケ}}$ である。

(ii)　-2 より大きい異なる2つの実数解をもつ a の値の範囲は
$\boxed{\text{コ}} < a < \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(3)　6枚の硬貨を同時に投げるとき，ちょうど3枚が表になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(4) 座標平面上に3点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 1)$，$\mathrm{B}(a-1,\ 2a-7)$（$a>0$）がある。

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{タ}}\,a-\boxed{\text{チツ}}$$

であり，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積が10のとき，a の値は

$$a=\boxed{\text{テ}}$$

である。

第2問 （配点　25）

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とし，関数

$$f(\theta) = 4\sin\theta\cos\theta - 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 7$$

を考える。

(1) $f(0) = \boxed{\text{ア}}$，$f(\pi) = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおく。$\sin\theta\cos\theta$ と $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ を t の式で表すと

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}t^2 - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}t$$

であるから，$f(\theta)$ を t の式で表すと，

$$f(\theta) = \boxed{\text{ケ}}t^2 - \boxed{\text{コ}}t + \boxed{\text{サ}}$$

である。

(3) $t = \sin\theta + \cos\theta$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{シス}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

であるから，$f(\theta)$ は

$$t = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \text{ のとき最小値 } \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

をとる。

第3問 （配点　25）

関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ のグラフを $C_1: y=f(x)$ とする。

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}$$

であり，$f(x)$ の極値は

$$\text{極大値}: f\left(\boxed{\text{エオ}}\right)=\boxed{\text{カキ}},\quad \text{極小値}: f\left(\boxed{\text{ク}}\right)=\boxed{\text{ケコ}}$$

である。

(2) C_1 と x 軸との3つの交点の x 座標をα，β，γ ($\alpha<\beta<\gamma$) とおくと，

$$\alpha+\beta=\boxed{\text{サシ}},\quad \gamma=\boxed{\text{ス}}$$

であり

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{\text{セソ}}$$

である。

(3) C_1 を x 軸方向に -1，y 軸方向に5平行移動した曲線を $C_2: y=g(x)$ とおくと

$$g(x)=x^3-\boxed{\text{タチ}}x+\boxed{\text{ツテ}}$$

であり，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とおくと

$$S=\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

第4問 （配点　25）

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 3,\ (n+1)a_n - n a_{n+1} = \frac{6n(n+1)}{(n+2)(n+3)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められている。

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$，$a_3 = \dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおくと，

$$b_n - b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{n + \boxed{\text{カ}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{n + \boxed{\text{ク}}}$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{n\left(n + \boxed{\text{ケ}}\right)}{n + \boxed{\text{コ}}}$$

である。

(3) a_n の値が整数である自然数 n は $\boxed{\text{サ}}$ 個ある。

(4) $a_n > 100$ となる最小の自然数 n の値は $n = \boxed{\text{シス}}$ である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)，数字(0～9)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	● ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ● ⑨
ウ	⊖ ± ⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	● ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ● ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。