

2013年度

⑥ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

(1) $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ のとき

$$x + y = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}, \quad x^2 + y^2 = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2) 不等式

$$|2x - 7| \leq 7 \cdots \cdots \text{①}, \quad 3x^2 - 5x - 7 > 0 \cdots \cdots \text{②}$$

に対して、①の解は

$$\boxed{\text{ウ}} \leq x \leq \boxed{\text{エ}}$$

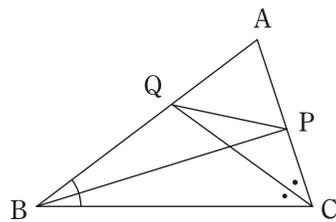
であり、①と②をともに満たす整数 x は $\boxed{\text{オ}}$ 個ある。

(3) 右図において、BP、CQ はそれぞれ $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ の二等分線である。

$$AB = BC = 12, CA = 6$$

とおくと

$$AP = \boxed{\text{カ}}, AQ = \boxed{\text{キ}}$$



であり

$$PQ = \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}, \triangle APQ = \frac{\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

第2問 (配点 25)

- (1) a を定数とする。方程式 $C: x^2 - 6x + y^2 - 4y + a = 0$ が xy 平面上で円を表すのは

$$a < \boxed{\text{アイ}}$$

のときで、中心の座標は $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ である。さらに、 C が半径 $\sqrt{5}$ の円を表すとき、

$$a = \boxed{\text{オ}}$$

である。

- (2) $f(x) = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3$ において、 $f(x) < 0$ を満たす x の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} < x < \boxed{\text{ク}}$$

である。また、 $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{ケ}} \text{ のとき最小値 } \boxed{\text{コサ}}$$

をとる。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 4, a_{n+1} = 3a_n - 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義されている。漸化式は

$$a_{n+1} - \boxed{\text{シ}} = 3 \left(a_n - \boxed{\text{シ}} \right)$$

と変形できるから、一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{ス}} \cdot \boxed{\text{セ}}^{n-1} + \boxed{\text{ソ}}$$

である。また、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が 1000 より大きくなる最小の n の値は

$$n = \boxed{\text{タ}}$$

である。

第3問 (配点 25)

男子4人，女子4人，合計8人の学生がいる。

(1) 8人の学生を3組に分ける。

(i) 4人，3人，1人の3組に分ける方法は **アイウ** 通りである。

(ii) 4人，2人，2人の3組に分ける方法は **エオカ** 通りである。

(2) 8人の学生を円形に並べる。

(i) 男，女，男，女，男，女，男，女のように並べる方法は **キクケ** 通りである。

(ii) 男，男，女，女，男，男，女，女のように並べる方法は **コサシ** 通りである。

(3) 8人から1人ずつ最大3人を選び出すが、女子を取り出した時点で選び出すことをやめる。

(i) 女子を選び出す確率は $\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(ii) 取り出した男子の人数の期待値は $\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

第4問 (配点 25)

2つの関数

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 10, \quad g(x) = -x^2 + 15x + a$$

を考える。ただし、 a は $a < 0$ を満たす定数である。

(1) 導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 - \boxed{\text{イ}} x$$

であり、 $f(x)$ の極値は

$$\text{極大値 } f(\boxed{\text{ウ}}) = \boxed{\text{エオ}}, \quad \text{極小値 } f(\boxed{\text{カ}}) = \boxed{\text{キ}}$$

である。

- (2) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が点 (α, β) において共通の接線をもつとする。
このとき,

$$f(\alpha) = g(\alpha) = \beta, f'(\alpha) = g'(\alpha)$$

が成り立つ。そこで、 $a < 0$ に注意すると、 α, β, a の値は

$$\alpha = \boxed{\text{ク}}, \beta = \boxed{\text{ケコ}}, a = -\boxed{\text{サシ}}$$

であり、共通の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ス}}x - \boxed{\text{セソ}}$$

である。さらに、曲線 $y = g(x)$ とこの共通接線および x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると、

$$S = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

である。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\text{コサ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。