

2011年度

⑥ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全問必答)

第1問 (配点 30)

(1) $x = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ のとき

$$x + y = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \quad xy = \boxed{\text{ウ}}$$

であり

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = \boxed{\text{エ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(2) $xyz \neq 0$ とする。連立方程式 $x + y = 5xy$, $y + z = 6yz$, $z + x = 7zx$ の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad y = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \quad z = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(3) 2次方程式 $x^2 - (a-1)x + (a-3)^2 = 0 \dots\dots ①$ が異なる2つの実数解をもつ a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} < a < \boxed{\text{セ}}$$

である。また、①が異なる2つの整数の解をもつのは $a = \boxed{\text{ソ}}$ のときである。

(4) 関数 $y = 2^{2x+1} - 2^{x+3} + 2^4$ は

$x =$ のとき最小値

をとる。また、 $0 \leq x \leq 2$ における y の最大値は である。

第2問 (配点 30)

(1) xy 平面上で、動点 P は最初に原点にある。1 個のさいころを投げて、1, 2 のいずれかの目が出たら P を x 軸の方向に 1 だけ動かし、3, 4, 5 のいずれかの目が出たら P を y 軸の方向に 1 だけ動かす。また、6 の目が出たら P を動かさない。このような試行を 4 回行ったとき

(i) P が x 軸上にある確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(ii) P が点 $(2, 2)$ の位置にある確率は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(iii) P が点 $(1, 1)$ の位置にある確率は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(2) ベクトル \vec{a}, \vec{b} が $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |3\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$ を満たすとき

(i) \vec{a}, \vec{b} の内積の値は $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(ii) $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ とおくと、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\triangle OAB = \frac{\boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ において、 $a_2 = 35$ 、 $a_{11} = -1$ とする。また、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく。

(i) 数列 $\{a_n\}$ の初項は 、公差は である。

(ii) S_n が最大となる n は $n =$ である。

(iii) S_n が負となる最小の n は $n =$ である。

第3問 (配点 20)

三角形 ABC において

$$AB = 4, BC = 9, CA = 8$$

とする。また、 $\angle BAC$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D、さらに AD の延長が外接円と交わる点を E (E \neq A) とする。

(1) 線分 BD, DC の長さは

$$BD = \boxed{\text{ア}}, \quad DC = \boxed{\text{イ}}$$

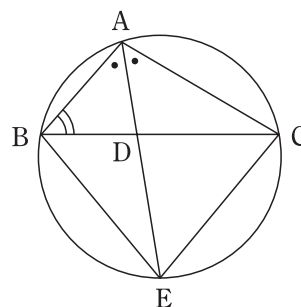
である。また、

$$\cos \angle ABC = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$$

であるから、線分 AD の長さは

$$AD = \sqrt{\boxed{\text{キク}}}$$

である。



(2) 線分 EA, EB, EC の長さの比を, 最も簡単な自然数で表すと

$$EA : EB : EC = \boxed{\text{ケ}} : \boxed{\text{コ}} : \boxed{\text{サ}}$$

である。

(3) 三角形 DAB と三角形 DCE の面積の和を S_1 , 三角形 DAC と三角形 DBE の面積の和を S_2 とする。 S_1 と S_2 の比を, 最も簡単な自然数で表すと

$$S_1 : S_2 = \boxed{\text{シス}} : \boxed{\text{セソ}}$$

である。

第4問 (配点 20)

3次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$ を考える。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}x^2 - \boxed{\text{イ}}x - \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2) 曲線 $y = f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)x - \boxed{\text{エ}}t^3 + \boxed{\text{オ}}t^2$$

である。この接線が原点 $(0, 0)$ を通るとき

$$t = \boxed{\text{カ}}, \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であるから、接線の方程式は

$$y = -\boxed{\text{ケ}}x, y = -\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x$$

である。

(3) $f(x)$ と $f'(x)$ に対して, 関係式

$$f(x) = \frac{1}{3} f'(x) \left(x - \boxed{\text{ス}} \right) - \boxed{\text{セ}} x - \boxed{\text{ソ}}$$

が成り立ち, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ において

極大値 $\boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}} - \boxed{\text{ト}}$

をとることがわかる。

————— 〈解答上の注意〉 —————

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\text{コサ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。