

2011年度

⑤ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから6ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
  - ① 氏名欄  
氏名・フリガナを記入しなさい。
  - ② 受験番号欄  
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

# 数 学

(全 問 必 答)

## 第1問 (配点 30)

- (1)  $\alpha = 2 + i$ ,  $\beta = 2 - i$  に対して,  $\alpha$ ,  $\beta$  を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2 - \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}} = 0$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\frac{\beta}{\alpha}$  を解にもつ 2 次方程式は

$$5x^2 - \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}} = 0$$

である。

- (2) 2 次関数  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a$ ,  $b$  は定数) は  $x = 1$  のとき最小値をとり,  $f(5) = 12$  を満たす。このとき

$$a = \boxed{\text{オカ}}, b = \boxed{\text{キク}}$$

であり,  $f(x)$  の最小値は  $\boxed{\text{ケコ}}$  である。

(3)  $x$  についての不等式

$$\frac{2x-5}{2} > \frac{2}{3}x + \frac{1-2x}{6} \dots\dots\dots \textcircled{1}, x(x-a) < 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

において、 $\textcircled{1}$ の解は

$$x > \boxed{\text{サ}}$$

である。また、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ をともに満たす整数  $x$  がちょうど 2 個存在する  $a$  の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} < a \leq \boxed{\text{ス}}$$

である。

(4)  $\triangle ABC$  において  $AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$  ,  $AC = \sqrt{6} - \sqrt{2}$  ,  $\angle BAC = 60^\circ$  とおくと、  
辺  $BC$  の長さは

$$BC = \boxed{\text{セ}} \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。また、 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  , 外接円の半径を  $R$  とおくと

$$S = \sqrt{\boxed{\text{タ}}} , R = \boxed{\text{チ}}$$

である。

## 第2問 (配点 30)

- (1)  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。 $P = 24^{20}$  とおくと

$$\log_{10} P = \boxed{\text{アイ}} \log_{10} 2 + \boxed{\text{ウエ}} \log_{10} 3$$

であるから、 $P$  は  $\boxed{\text{オカ}}$  桁の数であることがわかる。

- (2) 2次関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  が  $f(0) = 1$ ,  $f'(1) = 2$ ,  $f'(2) = 8$  を満たすとき

$$a = \boxed{\text{キ}}, b = \boxed{\text{クケ}}, c = \boxed{\text{コ}}$$

であるから、 $f(x)$  の 0 から 1 までの定積分は

$$\int_0^1 f(x) dx = \boxed{\text{サ}}$$

である。

- (3) 2次関数  $f(x) = ax^2 - 3x + b$  が  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$  を満たすとき

$$a = \boxed{\text{シ}}, b = \boxed{\text{ス}}$$

であり、放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸とで囲まれた部分の面積は  $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$  である。

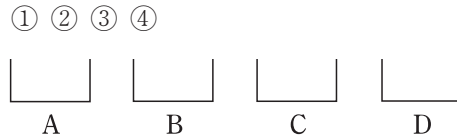
- (4)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定義された数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{タ}} \cdot \boxed{\text{チ}}^n - \boxed{\text{ツ}}$$

である。また、 $\frac{a_n}{3^n} > 2 - \frac{1}{1000}$  を満たす最小の自然数  $n$  は  $n = \boxed{\text{テ}}$  である。

### 第3問 (配点 20)

4つの箱 A, B, C, D に4個のボール①, ②, ③, ④を入れる。



ただし、1個のボールも入らない箱があってもよいものとする。

- (1) 4個のボールの入れ方は全部で アイウ 通りある。また、4つの箱にちょうど1個ずつのボールを入れる入れ方は エオ 通り、2つの箱にちょうど2個ずつのボールを入れる入れ方は カキ 通りある。

- (2) 1つの箱に入るボールの個数の最大値を  $X$  とし、 $X = k$  となる確率を

$$P(X = k) \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

とおく。このとき

$$P(X = 1) = \frac{\text{ク}}{\text{ケコ}}, \quad P(X = 2) = \frac{\text{サシ}}{\text{スセ}}$$

である。また、 $X$  の期待値は  $\frac{\text{ソタ}}{\text{チ}}$  である。

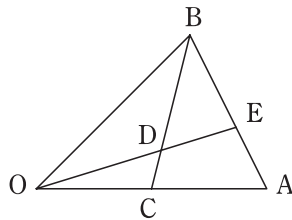
## 第4問 (配点 20)

一直線上にない3点  $O, A, B$  がある。線分  $OA$  の中点を  $C$ ，線分  $BC$  を  $3:1$  に内分する点を  $D$  とおく。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおくと

(1) ベクトル  $\overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{OD}$  を  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  で表すと

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \vec{b}$$



である。

(2) 直線  $OD$  が線分  $AB$  と交わる点を  $E$  とすると

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \vec{b}$$

である。ここで  $OB = 6$  とし、 $E$  が  $O, B$  を直径の両端とする円周上を動くとき

$$\left| \overrightarrow{OE} - \frac{1}{2} \vec{b} \right| = 3$$

であるから

$$\left| \vec{a} - \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \vec{b} \right| = \boxed{\text{ス}}$$

したがって、点  $A$  は、線分  $OB$  を  $\boxed{\text{セ}} : \boxed{\text{ソ}}$  に内分する点を中心とする半径  $\boxed{\text{タ}}$  の円周上を動く。

————— 〈解答上の注意〉 —————

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2  $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$  に  $-\frac{4}{5}$  と答えたいときは,  $\frac{-4}{5}$  として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば,  $\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}$  ,  $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$  に  $4\sqrt{2}$  ,  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  と答えるところを,  $2\sqrt{8}$  ,  $\frac{\sqrt{52}}{4}$  のように答えてはいけません。