

2011年度

④ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全問必答)

第1問 (配点 30)

- (1) x, y, z が $\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5}$, $xyz \neq 0$ を満たすとき

$$\frac{x}{y} = \boxed{\text{ア}}, \quad \frac{z}{y} = \boxed{\text{イ}}, \quad \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立つ。

- (2) 不等式 $|4x - 13| \leq 10 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $x^2 - 2x - 15 < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して, $\textcircled{1}$ の解は

$$\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \leq x \leq \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。また, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ をともに満たす整数 x は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

- (3) $x^2y = 16$, $x \geq 1$, $y \geq 1$ のとき

$$\log_2 y = \boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}} \log_2 x$$

であるから, $(\log_2 x)(\log_2 y)$ は

$$\text{最大値} \boxed{\text{シ}}, \quad \text{最小値} \boxed{\text{ス}}$$

をとることがわかる。

(4) $4 \cos 2x + 6 \cos x - 1 = 0$ のとき

$$\boxed{\text{セ}} \cos^2 x + \boxed{\text{ソ}} \cos x - \boxed{\text{タ}} = 0$$

であるから, $\cos x$ の値は $\cos x = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であり, $0 \leq x < 5\pi$ の範囲で x は

$\boxed{\text{テ}}$ 個の値をとる。

第2問 (配点 30)

- (1) $u = 6 + 8i$, $v = 2 + i$ に対して

$$\frac{u}{v} = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}i$$

である。また、 $ux + vy = 10i$ (x, y は実数) とおくと

$$x = \boxed{\text{ウ}}, y = -\boxed{\text{エ}}$$

である。

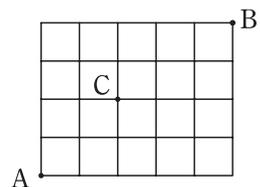
- (2) ベクトル $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (t, -2t)$ (t は実数) に対して、 $|\vec{a} + \vec{b}|$ は

$$t = \boxed{\text{オ}} \text{ のとき最小値 } \boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$

をとる。また、 \vec{a} と $\vec{a} + \vec{b}$ が直交するのは $t = \boxed{\text{ク}}$ のときである。

- (3) 図のような道路があり、A から B までの最短のコースを考える。

- (i) 最短コースは全部で $\boxed{\text{ケコサ}}$ 通りある。
 (ii) C を通るコースは $\boxed{\text{シス}}$ 通りあり、そのうち C が右折禁止 (左折, 直進は可) であるとするとき $\boxed{\text{セソ}}$ 通りある。



(4) 一つのさいころを2回続けて投げるとき、

1回目の数が2回目の数より大きくなる確率は $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$

である。また、

1回目の数が2回目の数の倍数となる確率は $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$

である。

第3問 (配点 20)

2円 C_1, C_2 を

$$C_1: x^2 + y^2 - 4ax - 2ay + 10a - 10 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 10$$

と定義する。また、 C_1 の中心を P 、半径を r とおく。ただし、 $a > 0$ とする。

(1) $a = 1$ のとき、 C_1 の P の座標と r の値は

$$P\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right), r = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) C_1, C_2 は a の値にかかわらず、2点

$$A\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}\right), B\left(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キク}}\right)$$

で交わり、直線 AB の方程式は

$$\boxed{\text{ケ}}x + y - \boxed{\text{コ}} = 0$$

である。

(3) 原点を O とすると, (2)の A, B に対して

$$\angle AOB = \boxed{\text{サシ}}^\circ$$

である。ここで $\angle APB = 60^\circ$ とすると

$$r = \boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

また, C_1, C_2 の共通部分で囲まれる図形の面積を S とおくと

$$S = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}} \pi - \left(\boxed{\text{ツ}} + \boxed{\text{テ}} \sqrt{\boxed{\text{ト}}} \right)$$

である。

第4問 (配点 20)

3次関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3 + 8$ を考える。ただし、 a は $a > 0$ を満たす定数である。

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 - \boxed{\text{イ}} a^2$$

である。また、 $f(x)$ の極大値を M 、極小値を m とおくと

$$M = \boxed{\text{ウ}} a^3 + \boxed{\text{エ}}, \quad m = -a^3 + \boxed{\text{オ}}$$

である。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が互いに異なる3個の実数解をもつ a の値の範囲は

$$a > \boxed{\text{カ}}$$

である。

(3) 関数 $g(x)$ が

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt + 3ax^2 + 3a^2 + 4 \quad \dots\dots (*)$$

を満たすとする。 $(*)$ において $x = 0$ を代入して

$$a = \boxed{\text{キ}}$$

がわかる。さらに、 $(*)$ の両辺を x で微分することで

$$g(x) = \boxed{\text{ク}} x^2 - \boxed{\text{ケコ}} x - \boxed{\text{サシ}}$$

を得る。

- (4) (3)で得られた $g(x)$ に対して, $y = g(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を S とおくと

$$S = \boxed{\text{スセ}} \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

————— 〈解答上の注意〉 —————

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\text{コサ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。