2010年度

⑥　数　　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから６ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　　学

（全　問　必　答）

第1問　（配点　25）

⑴　不等式

$$x^2-5x+6>0 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

$$x^2-(2a-1)x+a(a-1)<0 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

において，①の解は

$$x<\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}<x$$

である。また，②を満たすすべてのxが①の範囲に含まれるとき，定数aの範囲は

$$a\leqq\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\leqq a$$

である。

⑵　座標平面上に3点O(0，0)，A(4，0)，B(3，4)がある。三角形OABの周の長さをl，内接円の半径をrとおくと

$$l=\boxed{\text{オ}}+\sqrt{\boxed{\text{カキ}}},\ lr=\boxed{\text{クケ}}$$

である。

(3)　$(1+x)^5$ の展開式で

x^3 の係数は $\boxed{\text{コサ}}$

である。また，$\{(1+x)^5+x\}^3$ の展開式で

x^3 の係数は $\boxed{\text{シスセ}}$

である。

(4)　4 個のさいころを同時に投げるとき

1 の目と 6 の目の少なくとも一つが現れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$

である。また

1 の目と 6 の目がちょうど 1 個ずつ現れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$

である。

第２問　（配点　25）

⑴　i を虚数単位とする。$(3-2i)(a+bi)=5+i$ を満たす実数 a，b の値は

$$a=\boxed{\text{ア}},\ b=\boxed{\text{イ}}$$

である。このとき，$(a+bi)^4=\boxed{\text{ウエ}}$ である。

⑵　式の値は

$$\log_2 4=\boxed{\text{オ}},\ \log_2 3\cdot\log_3 4=\boxed{\text{カ}},\ 4^{\log_2 3}=\boxed{\text{キ}}$$

である。

⑶　すべての項が正である等比数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1+a_2+a_3=1,\ a_{13}+a_{14}+a_{15}=64$$

を満たすとき，初項を a，公比を r とおくと

$$a=\frac{\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}},\ r=\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

⑷　三角形OABにおいて，ABを１：３に内分する点をP，OPの中点をQとおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

である。さらに，直線BQとOAの交点をRとおくと $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

である。

第3問　（配点　25）

(1)　a，b，c，d を定数とする。1次関数 $f(x)=ax+a-2$ が

$$\int_1^x (t+1)f(t)dt = 2x^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たすとする。$(*)$ の両辺を x で微分して，係数を比較すると

$$a=\boxed{\text{ア}},\ b=\boxed{\text{イ}},\ c=\boxed{\text{ウ}}$$

である。さらに，$(*)$ において $x=1$ として

$$d=-\boxed{\text{エオ}}$$

を得る。

(2)　p を $1<p<2$ を満たす定数とする。関数 $g(x)=(x-1)(x-p)$ に対して，不定積分は

$$\int g(x)\,dx = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}x^3 - \frac{p+1}{\boxed{\text{ク}}}x^2 + px + C$$

ただし，C は積分定数である。ここで，$F(p)=\displaystyle\int_1^2 |g(x)|\,dx$ とおくと

$$F(p)=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}p^3 - p^2 + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}p + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

となる。したがって，$F(p)$ は $p=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ のとき最小値をとる。

第4問 （配点　25）

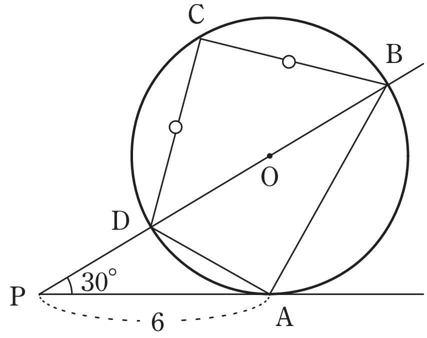
円 O に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB} > \mathrm{AD},\ \mathrm{BC} = \mathrm{CD}$$

とし，A における円 O の接線と直線 BD との交点を P とおく。ここで

$$\mathrm{PA} = 6,\ \angle\mathrm{APB} = 30^\circ$$

とおくと，



$$\mathrm{PB} \cdot \mathrm{PD} = \boxed{\text{アイ}}$$

および

$$\angle\mathrm{ABC} = \boxed{\text{ウエ}}^\circ$$

が成り立つ。BD が円 O の直径のとき(図参照)，$\mathrm{OA} = \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ であるから，

$$\mathrm{PD} = \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}},\ \mathrm{BC} = \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

であり，四角形 ABCD の面積を S とおくと

$$S = \boxed{\text{サシ}} + \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である。さらに，AC と BD の交点を Q とおくと

$$\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{QD}} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}},\ \frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{QD}} = \sqrt{\boxed{\text{チ}}},\ \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QD}} = \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)，数字(０～９)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例１　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83 と答えたいとき

ア	● ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ● ⑨
ウ	⊖ ± ⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例２　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	● ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ● ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。