2005年度

④　数　学

(100点　60分)

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから６ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問　(配点　25)

(1)　2点A(2，1)，B(6，3)の中点Mの座標は$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$である。また，線分ABの垂直二等分線の方程式は$\boxed{\text{ウ}}\,x+y=\boxed{\text{エオ}}$である。

(2)　xの方程式 $2^{3x+1}-2^{2x+2}-2^{x}+2=0$ ……①　において，$2^{x}=t$とおくと

$$\boxed{\text{カ}}\,t^{3}-\boxed{\text{キ}}\,t^{2}-t+2=0$$

となり，さらにこの式は

$$\left(t-\boxed{\text{ク}}\right)\left(\boxed{\text{ケ}}\,t^{2}-\boxed{\text{コ}}\right)=0$$

と因数分解できる。したがって，①を満たすxの値は

$$x=-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \boxed{\text{ス}}$$

である。

(3)　2つのベクトル$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(x,\ \sqrt{6})$について

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるとき，$x=\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$

であり

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるとき，$x=\pm\boxed{\text{タ}}$

である。

第２問　(配点　25)

円周上に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄをこの順にとり，面積比が

$$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{ACD} = 1 : 1,\quad \triangle \mathrm{ABD} : \triangle \mathrm{BCD} = 5 : 8$$

となるようにする。さらに，線分の長さについて，$\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AD} = 3$ であるとする。

(1)　$\mathrm{BC} = x$，$\mathrm{CD} = y$ とおくと

$$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{ACD} = 1 : 1 \text{ より}\quad y = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\,x$$

$$\triangle \mathrm{ABD} : \triangle \mathrm{BCD} = 5 : 8 \text{ より}\quad xy = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であるから

$$x = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(2)　$\angle \mathrm{BAD} = \theta$ とおいて，$\triangle \mathrm{ABD}$ に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2 = \boxed{\text{コサ}} - \boxed{\text{シス}}\cos\theta$$

を得る。さらに，$\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BCD} = 180°$ であるから，$\triangle \mathrm{BCD}$ にも余弦定理を用いて，BD の長さ，$\cos\theta$ の値を求めると

$$\mathrm{BD} = \boxed{\text{セ}},\ \cos\theta = -\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。したがって，四角形 ABCD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

第３問 (配点　25)

Ｏを原点とする座標平面において，放物線 $C : y = (x-2)^2$ 上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ (t-2)^2)$ における接線を l とする。

(1) l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}}\,t - \boxed{\text{イ}}\right)x - t^2 + \boxed{\text{ウ}}$$

である。これを利用して，原点から引いた放物線 C の接線を調べると

$$y = \boxed{\text{エ}} \quad \text{および} \quad y = \boxed{\text{オカ}}\,x$$

である。

(2) $0 < t < 2$ のとき，l と y 軸との交点をＱとし，三角形 OPQ の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ を t の式で表すと

$$S(t) = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\boxed{\text{ケ}}\,t - t^3\right)$$

であるから，$S(t)$ は

$$t = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ のとき，最大値 } \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

をとる。この値は放物線 C と x 軸，y 軸で囲まれる部分の面積の $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ 倍である。

第4問　(配点　25)

袋の中に白球が 4 個，赤球が 2 個入っている。

(1)　袋の中から 3 個の球を取り出すとき，3 個とも白球である確率を p_1，2 個が白球で他の 1 個が赤球である確率を q_1，1 個が白球で他の 2 個が赤球である確率を r_1 とすると

$$p_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad q_1 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad r_1 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

であるから，取り出される白球の個数の期待値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(2)　袋の中から 1 個の球を取り出して，色を確認して元に戻す。この試行を繰り返し 3 回行うとき，3 回とも白球である確率を p_2，2 回が白球で他の 1 回が赤球である確率を q_2，1 回が白球で他の 2 回が赤球である確率を r_2 とすると

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}, \quad q_2 = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad r_2 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

であるから，取り出される白球の個数の期待値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

(3)　袋の中から 1 個の球を取り出して，色を確認して，白球ならば元に戻し，赤球ならば元に戻さない。この試行を繰り返し 3 回行うとき，2 回が白球で他の 1 回が赤球である確率を q_3 とすると

$$q_3 = \frac{\boxed{\text{タチツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$$

である。