2005年度

② 数　学

(100点　60分)

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから７ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問　(配点　25)

(1)　2つの2次方程式

$$x^2 - 2x - a = 0 \quad \cdots\cdots ①,\quad x^2 + ax + 2 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

が共通の解を1つだけもつとき，$a = \boxed{ア}$ であり，その共通解は $x = \boxed{イウ}$ である。また，方程式①，②合わせて3個の解を3解にもつ3次方程式は

$$x^3 - \boxed{エ}\,x - \boxed{オ} = 0$$

である。

(2)　3つの文字a，b，cから同じ文字を繰り返し使うことを許して，6個の文字からなる順列を作る。そのような順列は全部で $\boxed{カキク}$ 個ある。このうち，同じ文字が2個以上連続しないものは $\boxed{ケコ}$ 個あり，さらに，そのうちで3つの文字a，b，cのすべてが使われているものは $\boxed{サシ}$ 個ある。

(3) 関数 $f(x)$ は $f(x)=x^2-2x+\int_0^3\{f(t)+2\}\,dt$ を満たす。ここで

$$a=\int_0^3\{f(t)+2\}\,dt \quad \cdots\cdots \text{①}$$

とおくと，a は定数で $f(x)=x^2-2x+a$ とかけるから，①より a の値を求めると

$$a=\boxed{\text{スセ}}$$

である。このとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を S とすると

$$S=\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

第2問 (配点　25)

三角形 ABC において，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ の値がすべて整数となるとき，これらの値を調べよう。

(1) $A \leqq B \leqq C$ とすると，$0° < A \leqq \boxed{\text{アイ}}°$ であるから

$$\boxed{\text{ウ}} < \tan A \leqq \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

$\tan A$ は整数であるから

$$\tan A = \boxed{\text{オ}} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

(2) ①が成り立つとき，$B + C = \boxed{\text{カキク}}°$ であるから

$$\tan(B + C) = \boxed{\text{ケコ}}$$

より

$$\left(\tan B - \boxed{\text{サ}}\right)\left(\tan C - \boxed{\text{シ}}\right) = \boxed{\text{ス}}$$

$\tan B$, $\tan C$ が整数であるとき，$A \leqq B \leqq C$ より

$$\tan B = \boxed{\text{セ}}, \quad \tan C = \boxed{\text{ソ}} \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。

(3)　①，②が成り立つとき，$\sin B$ の値は

$$\sin B = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}$$

$\mathrm{BC} = 2\sqrt{2}$ であるとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

第３問　(配点　25)

3 次関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$ に対して，曲線 $y = f(x)$ を C とする。

(1)　導関数 $f'(x)$ を因数分解すると

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\left(x + \boxed{\text{イ}}\right)\left(x - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

(2)　$f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{エオ}} \text{ で極大値 } \boxed{\text{カキ}},\quad x = \boxed{\text{ク}} \text{ で極小値 } \boxed{\text{ケコ}}$$

をとる。

(3)　C 上の点 $\mathrm{A}(2, f(2))$ における接線を $l : y = g(x)$ とすると

$$g(x) = \boxed{\text{サシ}}\,x - \boxed{\text{スセ}}$$

であるから，C と l の A 以外の交点 B の x 座標は $-\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

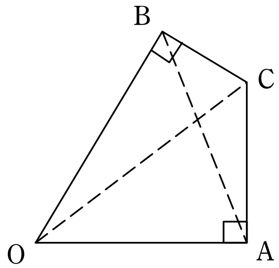
(4)　C 上，l 上の A と B の間に，それぞれ点 $\mathrm{P}(t, f(t))$，点 $\mathrm{Q}(t, g(t))$ をとるとき，線分 PQ の長さは

$$t = \boxed{\text{ツテ}} \text{ において最大値 } \boxed{\text{トナニ}}$$

をとる。

第4問　(配点　25)

四角形 OACB において



$$\mathrm{OA}=2,\ \mathrm{OB}=3,\ \angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

であり，さらに，OA⊥AC，OB⊥BC であるとする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}}$$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad(s,\ t\ \text{は実数})$$

とおくと，OA⊥AC より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{イ}}$ であるから

$$\boxed{\text{ウ}}\,s+\boxed{\text{エ}}\,t=4\quad\cdots\cdots\cdots\ ①$$

が成り立つ。同様に，OB⊥BC より

$$s+\boxed{\text{オ}}\,t=\boxed{\text{カ}}\quad\cdots\cdots\cdots\ ②$$

が成り立つ。①，②より，s，t の値を求めると

$$s=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ t=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。この結果から，線分 OC の長さは

$$\mathrm{OC}=\frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

であり，AB と OC の交点を D とするとき，線分の長さの比は

$$\mathrm{OD}:\mathrm{DC}=\boxed{\text{ソ}}:\boxed{\text{タ}},\ \mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\boxed{\text{チ}}:\boxed{\text{ツ}}$$

であることがわかる。