2006年度

⑤　数　　学

(100点　60分)

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから６ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問 (配点　25)

⑴　x の関数 $f(x) = \cos 2x + 3\cos x - 1$ を考える。$\cos x = t$ とおいて $f(x)$ を t の式で表すと

$$f(x) = \boxed{\text{ア}}\,t^2 + \boxed{\text{イ}}\,t - \boxed{\text{ウ}}$$

と表せる。$f(x) = 0$ を満たす t の値は 2 つあるが，$t = \cos x$ であるから，

$$t = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。さらに，$0 \leqq x < 360°$ とすると，$f(x) = 0$ を満たす x の値は

$$x = \boxed{\text{カキ}}°\quad\text{および}\quad x = \boxed{\text{クケコ}}°$$

である。

⑵　2 曲線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2 + 4x$ の原点以外の交点の座標は

$$\left(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$$

であり，2 曲線で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(3)　11 個の数 1，2，2^2，2^3，$\cdots$，2^{10} の和を S，積を T とおくと

$$S = 2^{\boxed{\text{ソタ}}} - \boxed{\text{チ}}, \quad T = 2^{\boxed{\text{ツテ}}}$$

である。数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 1,\ \cdots$$

において，最初の 2^{10} は第 $\boxed{\text{トナ}}$ 項であり，初項から第 $\boxed{\text{トナ}}$ 項までの積は $2^{\boxed{\text{ニヌネ}}}$ である。

第2問 (配点　25)

2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x\text{ ,}\quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

によって定める。ただし，a，b，c は実数の定数である。

(1) 関数 $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{アイ}}\ \text{において極大値}\ \boxed{\text{ウエ}}$$
$$x = \boxed{\text{オ}}\ \text{において極小値}\ \boxed{\text{カキ}}$$

をとる。

(2) 曲線 $y = g(x)$ が，点 A $(2,\ f(2))$ を通るとき

$$\boxed{\text{ク}}\,a + \boxed{\text{ケ}}\,b + c = \boxed{\text{コ}}$$

点 A における 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の接線の傾きが一致するとき

$$\boxed{\text{サ}}\,a + b = \boxed{\text{シス}}$$

が成り立つ。さらに，$g(x)$ が $x = \dfrac{9}{2}$ で最大値をとるとき

$$a = -\boxed{\text{セ}}\text{ ,}\quad b = \boxed{\text{ソタ}}\text{ ,}\quad c = -\boxed{\text{チツ}}$$

であり，$g(x)$ の最大値は $g\left(\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

第３問 (配点　25)

三角形 OAB において，OA ＝ 2，OB ＝ 3 とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の値が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 4$ であるとする。いま，この三角形 OAB を xy 平面上に，O を原点，A を x 軸の正の部分に，B を $y > 0$ の部分におくと，O (0, 0)，A (2, 0) である。B の座標を (a, b) とおくと，OB ＝ 3 より

$$a^2 + b^2 = \boxed{\text{ア}} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 4$ より，$a = \boxed{\text{イ}}$ であるから，①および $b > 0$ より

$$b = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

このとき，O，A を直径の両端とする円を C とすると，円 C の

$$\text{中心は}\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)\text{，半径は}\boxed{\text{カ}}$$

である。円 C と直線 OB の O 以外の交点を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\ \frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

である。さらに，AP の中点を M とし，直線 OM と辺 AB の交点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

第4問　(配点　25)

サイコロを2回振って，出る目を順にa，bとし$A=\log_2 a$，$B=\log_2 b$とおく。

(1)　$A=0$となる確率は$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$A$が正の整数である確率は$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$である。

(2)　Aの期待値は

$$\frac{\boxed{オ}+\boxed{カ}\log_2 3+\log_2 5}{\boxed{キ}}$$

である。

(3)　$AB=0$となる確率は$\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサ}}$，$A+B$が正の整数である確率は$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$

である。

(4)　$\dfrac{5}{2}<A+B<\dfrac{7}{2}$となる確率は$\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$である。