2004年度

① 数　学

(100点　60分)

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから５ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

②　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問　(配点　25)

(1)　放物線 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 4$ が異なる 2 点で x 軸と交わるような a の値の範囲は $a > \boxed{\text{ア}}$ である。また，その 2 交点を結ぶ線分の長さが 4 になるのは $a = \boxed{\text{イ}}$ のときである。

(2)　$a_1 = 3$，$a_{n+1} = 4a_n - 3$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表すと，$a_n = \boxed{\text{ウ}}^{2n-1} + \boxed{\text{エ}}$ である。したがって，a_{100} を十進法で表すと $\boxed{\text{オカ}}$ 桁の数になる。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

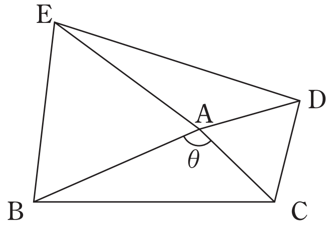
(3)　三角形 OAB において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{\text{è}}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1$ が成り立つとする。このとき，辺 AB の長さは $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，三角形 OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。ただし，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさを表し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を表す。

第2問 (配点　25)

三角形ABCにおいて

$$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{AC}=b,\ \angle\mathrm{BAC}=\theta$$

とする。ただし，a，b は定数で，$60^\circ<\theta<180^\circ$ である。図のように三角形ABCの外側に2つの正三角形ACD，BAEをつくり，四角形BCDEの面積を S とする。



(1) S を a，b，θ で表すと

$$S=\frac{ab}{2}\left\{\sin\theta+\sin\left(\boxed{\text{アイウ}}^\circ-\theta\right)\right\}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}\,(a^2+b^2)$$

である(ただし，$0^\circ<\boxed{\text{アイウ}}^\circ<360^\circ$ とする。)。ここで

$$\sin\theta+\sin\left(\boxed{\text{アイウ}}^\circ-\theta\right)=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\sin\theta-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}\cos\theta$$

$$=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\,\sin\left(\theta-\boxed{\text{サシ}}^\circ\right)$$

であるから，S は $\theta=\boxed{\text{スセソ}}^\circ$ のとき最大になる。

(2) $a=5$，$b=3$ のとき，S の最大値は $\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，このとき，四角形BCDEの周の長さは $\boxed{\text{テト}}$ である。

第3問 (配点　25)

2つの曲線

$$C_1 : y = -x^2 + 6x,\ C_2 : y = 2x^2 + a$$

が点Pを共有し，点Pにおける2曲線の接線が一致している。

(1)　点Pの座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$$

であるから，定数 a の値は $a = \boxed{\text{ウ}}$ であり，Pにおける接線 l の方程式は

$$l : y = \boxed{\text{エ}}\,x + \boxed{\text{オ}}$$

である。

(2)　2曲線 C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3)　(2)の部分は，直線 l によって2つに分割されるが，その2つの部分の面積比を最も簡単な整数の比で表すと

$$(l\ \text{の上側の面積}) : (l\ \text{の下側の面積}) = \boxed{\text{キ}} : \boxed{\text{ク}}$$

である。

第４問 (配点　25)

サイコロを３回投げるとき

⑴　３回とも３以上の目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

⑵　ちょうど２回だけ３の目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

⑶　出る目の最小値が３である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$ である。

⑷　出る目の積が３の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

⑸　出る目を順に並べてできる３桁の数が３の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。