2004年度

③　数　　学

(100点　60分)

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから７ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問　(配点　25)

(1)　xy 平面上の円 $C：x^2+y^2-8x-6y+9=0$ の

$$中心の座標は\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)，半径は\boxed{\text{ウ}}$$

である。中心が第 1 象限内にあって，x 軸，y 軸に接し円 C に外接する円の半径は $\boxed{\text{エオ}}\pm\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1+a_2+a_3=1$，$a_5+a_6+a_7=16$，$a_4<0$ を満たすとき

$$a_1=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\quad a_4=-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(3)　三角形 OAB において，OA $=3$，OB $=2$，$\angle$AOB $=60°$ であるとする。辺 AB を $1：2$ に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

第２問　(配点　25)

xy 平面上の曲線

$$C_1 : y = \log_2(x+1),\ C_2 : y = \log_{\frac{1}{2}}(7-2x)+2$$

の交点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$ とする。

(1)　x_1，x_2 は２次方程式

$$\boxed{\text{ア}}\,x^2 - \boxed{\text{イ}}\,x - \boxed{\text{ウ}} = 0$$

の解として得られるから，A，B の座標は

$$\mathrm{A}\left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キク}}\right),\ \mathrm{B}\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$$

である。

(2)　直線 $x = p$ $(x_1 < p < x_2)$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P_1，P_2 とおくと，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは

$$p = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\ \text{において最大値}\ \boxed{\text{ス}}\log_2 3 - \boxed{\text{セ}}$$

をとる。

(3)　直線 $y = q\ (y_1 < q < y_2)$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ Q_1，Q_2 とおくと，線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の長さは

$$q = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \text{ において，最大値 } \frac{\boxed{\text{チ}} - \boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

をとる。

第３問　(配点　25)

a，b，c は実数の定数であり $a>0$ とする。関数

$$f(x)=2x^3-(a+b)x^2+12ax+3a+c$$

は極値をもち，極大値をとる x の値は $x=a$，極小値は $8a-9$ である。

(1)　b，c を a で表せば

$$b=\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\,,\quad c=\boxed{\text{ウエ}}\,a-\boxed{\text{オ}}$$

であり，a の値の範囲は $0<a<\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸に接するときの a の値は

$$a=\boxed{\text{キ}}\ \text{または}\ a=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(3)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ に対して $I=\displaystyle\int_0^3 |f'(x)|\,dx$ とおくと

$$I=\boxed{\text{コ}}\left\{f(a)-f\left(\boxed{\text{サ}}\right)\right\}+f\left(\boxed{\text{シ}}\right)-f\left(\boxed{\text{ス}}\right)$$

より，I を a で表すと

$$I=-\boxed{\text{セ}}\,a^3+\boxed{\text{ソタ}}\,a^2-\boxed{\text{チツ}}\,a+\boxed{\text{テト}}$$

である。さらに，I を最小にする a の値は

$$a=\frac{\boxed{\text{ナ}}-\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

第4問 (配点　25)

a，b，c を実数とする。3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

が $1+2\sqrt{2}\,i$ （i は虚数単位）を 1 つの解にもつものとする。

(1)　$1+2\sqrt{2}\,i$，$1-2\sqrt{2}\,i$ を 2 解にもつ 2 次方程式は

$$x^2 - \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}} = 0$$

である。

(2)　b，c を a で表すと

$$b = \boxed{\text{ウエ}}\,a + \boxed{\text{オ}}, \quad c = \boxed{\text{カ}}\,a + \boxed{\text{キク}}$$

である。

(3)　複素数平面上で，方程式①の 3 解の表す 3 点が，原点を中心とするある円周上にあるとき，その円の半径は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，a の値は

$$a = -\boxed{\text{コ}} \quad \text{または} \quad a = \boxed{\text{サ}}$$

である。