**2004年度**

# ⑤　数　　学

**(100点　60分)**

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから６ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

**氏名・フリガナ**を**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

**受験番号**(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

# 数　　学

## (全　問　必　答)

## 第1問　(配点　25)

(1)　$0° < x < 360°$ のとき，$\sin 4x = \sin x$ を満たす $x$ は $\boxed{\text{ア}}$ 個あり，その中で最小の角は $\boxed{\text{イウ}}°$，最大の角は $\boxed{\text{エオカ}}°$ である。

(2)　サイコロを3回投げて出た目を順に $x$，$y$，$z$ とする。$x+y+z=12$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$，$xyz$ が6の倍数とならない確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である。

(3)　$xyz$ 空間に直線 $l:(x, y, z)=(4, 8, 0)+t(1, 0, 1)$（$t$ は実数）と点 A$(3, 1, 2)$ がある。直線 $l$ 上に点 P をとって $\mathrm{OP} \perp \mathrm{OA}$ が成り立つようにするとき，点 P の座標は $\left(\boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}}, \boxed{\text{テト}}\right)$ であり，このときの三角形 OAP の面積は $\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。ただし，O は座標の原点である。

## 第2問 (配点　25)

初項が 2 である数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とおくとき

$$nS_{n+1}-(n+1)S_n=4n(n+1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つとする。

(1) $T_n=\dfrac{S_n}{n}$ とおくと，$T_1=\boxed{\text{ア}}$ であり

$$T_{n+1}-T_n=\boxed{\text{イ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つから，$T_n$ を $n$ の式で表すと

$$T_n=\boxed{\text{ウ}}\,n-\boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) $S_n=nT_n$ であるから，これを利用して $a_n$ を $n$ の式で表すと

$$a_n=\boxed{\text{オ}}\,n-\boxed{\text{カ}}$$

である。

(3)　$b_k = \dfrac{a_k a_{k+1}}{4}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{\boxed{\text{キク}}\,n^3 + \boxed{\text{ケコ}}\,n^2 - \boxed{\text{サシ}}\,n}{\boxed{\text{ス}}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = \frac{n}{\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ソ}}}$$

である。

## 第３問 (配点　25)

放物線 $C : y = f(x)$ は放物線 $y = 2x^2$ を平行移動したもので，点 $(1,\ f(1))$ における $C$ の接線 $l$ の方程式は $y = (-2a + 2)x + 4a - 3$ である。ただし，$a$ は定数である。

(1)　$f(x) = px^2 + qx + r$ とおくと

$$p = \boxed{\text{ア}},\ q = \boxed{\text{イウ}}\left(a + \boxed{\text{エ}}\right),\ r = \boxed{\text{オ}}\,a - \boxed{\text{カ}}$$

であり，$C$ は $a$ の値によらず定点 $\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$ を通る。

(2)　$C$ と $l$ および $y$ 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(3)　$C$ と直線 $y = -2x + 8$ で囲まれた部分の面積を $S$ とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\left(a^2 - \boxed{\text{ス}}\,a + \boxed{\text{セソ}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

であるから，$S$ は $a = \boxed{\text{タ}}$ のとき最小になり，

最小値は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$

である。

## 第４問　(配点　25)

複素数平面上で，不等式 $|z|^2 \leqq 2(z+\overline{z})+1$ を満たす点 $z$ の全体からなる領域を $D$ とする。ただし，$\overline{z}$ は $z$ の共役複素数を表す。

(1)　$D$ は点 $\boxed{\text{ア}}$ を中心とする半径 $\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ の円の内部および円周上の点からなる領域である。

(2)　1 の 8 乗根で実数であるものは $\boxed{\text{ウ}}$ 個，純虚数であるものは $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。また，実部，虚部がともに正であるものは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}i$ である。

(3)　$D$ は $\boxed{\text{ケ}}$ 個の 1 の 8 乗根を含む。

(4)　自然数 $n$ に対して，$D$ は $\boxed{\text{コ}}\,n+\boxed{\text{サ}}$ 個の 1 の $4n$ 乗根を含む。