

2016年度

⑥ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全問必答)

第1問 (配点 25)

(1) 円に内接する四角形 ABCD において

$$AB = 4, AD = 6, BC = 2CD, \angle BAD = 60^\circ$$

とすると,

$$BD = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}, BC = \boxed{\text{ウ}}$$

であり, 四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) 赤玉 5 個, 白玉 4 個, 黒玉 3 個, 合計 12 個の玉がある。これら 12 個の玉を袋に入れ, その中から 3 個の玉を同時に取り出すとき,

$$3 \text{ 個とも同じ色の玉である確率は } \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

であり,

$$\text{赤玉, 白玉, 黒玉を 1 個ずつ取り出す確率は } \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

である。

(3) 四面体 $OABC$ において

$$\overrightarrow{OA} = (1, -4, 2), \overrightarrow{OB} = (-2, 1, 3), \overrightarrow{OC} = (a, 1, b) \quad (a, b \text{ は定数})$$

とする。 \overrightarrow{OC} が、 \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} の両方と垂直であるとき、

$$a = \boxed{\text{シ}}, b = \boxed{\text{ス}}$$

であり、四面体 $OABC$ の体積 V は

$$V = \boxed{\text{セ}}$$

である。

第2問 (配点 25)

x, y が

$$x^3 y = 2^9, \quad x \geq 2, \quad y \geq 2$$

を満たしている。

(1) $\log_2 x + \log_8 y$ の値は

$$\log_2 x + \log_8 y = \boxed{\text{ア}}$$

である。

(2) $\log_2 x$ と $\log_2 y$ のとりうる値の範囲は、それぞれ

$$\boxed{\text{イ}} \leq \log_2 x \leq \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad \boxed{\text{オ}} \leq \log_2 y \leq \boxed{\text{カ}}$$

である。

(3) $\log_2 x + \log_2 y$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \leq \log_2 x + \log_2 y \leq \boxed{\text{ク}}$$

である。

(4) $(\log_2 x)(\log_2 y)$ は

$$x = \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}, \quad y = \boxed{\text{スセ}} \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ をとる。

第3問 (配点 25)

関数 $f(x)$, $F(t)$ を

$$f(x) = x^2 - 4x, \quad F(t) = \int_t^{t+2} |f(x)| dx$$

と定める。

(1) $0 \leq t \leq 2$ のとき, $F(t) = \int_t^{t+2} \{-f(x)\} dx$ であるから,

$$F(t) = \boxed{\text{アイ}} t^2 + \boxed{\text{ウ}} t + \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

であり, $F(t)$ は

$$t = \boxed{\text{キ}} \text{ のとき最大値 } \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

をとる。

(2) $2 \leq t \leq 4$ のとき

$$F(t) = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} t^3 - \boxed{\text{ス}} t^2 - \boxed{\text{セ}} t + \boxed{\text{ソタ}}$$

であり, $F(t)$ の導関数は

$$F'(t) = \boxed{\text{チ}} t^2 - \boxed{\text{ツ}} t - \boxed{\text{テ}}$$

したがって, $F(t)$ は

$$t = \boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} \text{ のとき最小値 } \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} - \boxed{\text{ノ}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$$

をとる。

第4問 (配点 25)

数列 $\{a_n\}$ を、条件

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

(1) 条件より

$$a_2 = \boxed{\text{アイ}}, a_3 = \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2) $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

となり、数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることがわかる。その一般項は

$$b_n = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}n - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

であり、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}n^2 + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}n$$

である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n a_k = \left(\boxed{\text{ソ}}^n - \boxed{\text{タ}} \right) \cdot \boxed{\text{チ}}^n + \boxed{\text{ツ}}$$

である。

————— 〈解答上の注意〉 —————

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 キク / ケ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, コ $\sqrt{\text{サ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところ
を, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。