

2016年度

④ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから5ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

- (1) a を実数の定数とする。 x についての連立不等式 $\begin{cases} x + 1 < 3x - 1 \\ 3x - 4 > 4x - a \end{cases}$ が解をもつ
 a の値の範囲は

$$a > \boxed{\text{ア}}$$

であり、ただ1つの整数解をもつ a の値の範囲は

$$\boxed{\text{イ}} < a \leq \boxed{\text{ウ}}$$

である。

- (2) 9個の数字1, 2, ..., 9を6個と3個の2組に分ける方法は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りあり、
3個ずつの3組に分ける方法は $\boxed{\text{カキク}}$ 通りある。

- (3) 関数 $f(x) = \log_2(x - 1) + \log_2(11 - x)$ について

$$f(3) = \boxed{\text{ケ}}, f(4) = \log_2 \boxed{\text{コサ}}$$

である。また、 $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{シ}} \text{ のとき最大値 } \boxed{\text{ス}} \log_2 \boxed{\text{セ}}$$

をとる。

第2問 (配点 25)

座標平面上に円と $C: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$ と直線 $L: mx - y = 0$ があり、 C と L が共有点をもつとする。ただし、 m は実数の定数である。

(1) 円 C の中心の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ 、半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 定数 m の値の範囲は

$$m \geq \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり、 C と L が接するとき、接点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)$$

である。

(3) 円 C の中心を C とする。円 C と直線 L が異なる 2 点 P, Q で交わり、 $PQ = 2\sqrt{3}$ のとき、 m の値は

$$m = \frac{\boxed{\text{シ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。このとき、円 C は線分 PQ によって 2 つの部分に分けられるが、そのうち中心 C を含まない部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \pi - \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

第3問 (配点 25)

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ とし, xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ を考える。

- (1) 曲線 C と x 軸との交点の座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}}, 0 \right), \left(\boxed{\text{ウ}}, 0 \right)$$

であり, C と x 軸で囲まれた領域の面積を S とおくと

$$S = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

- (2) 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線を l とする。 l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{キ}} t^2 - \boxed{\text{ク}} t \right) x - \boxed{\text{ケ}} t^3 + \boxed{\text{コ}} t^2 + \boxed{\text{サ}}$$

である。 l が点 $(3, a)$ (a は定数) を通るとき,

$$2t^3 - \boxed{\text{シス}} t^2 + \boxed{\text{セソ}} t - \boxed{\text{タ}} + a = 0 \quad \dots\dots (*)$$

である。ここで, $(*)$ を $g(t) + a = 0$ とおくと

$$g'(t) = 6(t - \boxed{\text{チ}})(t - \boxed{\text{ツ}})$$

(ただし, $\boxed{\text{チ}} < \boxed{\text{ツ}}$ とする)

であり, 点 $(3, a)$ から曲線 C に 3 本の接線を引くことができる a の範囲は

$$\boxed{\text{テト}} < a < \boxed{\text{ナ}}$$

である。

第4問 (配点 25)

数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められている。

(1) $a_3 = \boxed{\text{アイ}}$, $a_4 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと,

$$b_{n+1} = \boxed{\text{オ}} b_n + \boxed{\text{カ}}$$

さらに

$$b_{n+1} + \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{ク}} (b_n + \boxed{\text{キ}})$$

が成り立つ。したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ケ}} \cdot \boxed{\text{コ}}^n - \boxed{\text{サ}}$$

である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{シ}} \cdot \boxed{\text{ス}}^n - \boxed{\text{セ}} n - \boxed{\text{ソ}}$$

である。さらに、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと

$$S_n = \boxed{\text{タ}} \cdot \boxed{\text{チ}}^n - \boxed{\text{ツ}} n^2 - \boxed{\text{テ}} n - \boxed{\text{ト}}$$

である。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\text{コサ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。