

2015年度

③ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから7ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
  - ① 氏名欄  
氏名・フリガナを記入しなさい。
  - ② 受験番号欄  
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

# 数 学

(全問必答)

## 第1問 (配点 25)

(1)  $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ ,  $y = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$  について

$$x - y = \boxed{\text{ア}}, \quad xy = \boxed{\text{イ}}$$

であるから

$$x^2 + y^2 = \boxed{\text{ウ}}, \quad x^3 - y^3 = \boxed{\text{エオ}}$$

である。

- (2) 放物線  $C: y = 2x^2 - ax + b$  に対して、 $C$  の頂点は直線  $y = 2x - 1$  上にあるとする。さらに、点  $(2, 3)$  が  $C$  上にあるとき、定数  $a, b$  の値は

$$a = \boxed{\text{カ}}, \quad b = \boxed{\text{キ}} \quad \text{または} \quad a = \boxed{\text{ク}}, \quad b = \boxed{\text{ケコ}}$$

である。

- (3)  $f(x) = \log_2(x+3) + 1 - \log_2(6-x)$  に対して、 $f(x) = 0$  を満たす  $x$  の値は

$$x = \boxed{\text{サ}}$$

であり、 $f(x) > 0$  を満たす  $x$  の値の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} < x < \boxed{\text{ス}}$$

である。

(4) 等差数列  $\{a_n\}$  において,  $a_3 = 20$ ,  $a_7 = 44$  とすると, 初項  $a_1$  および公差  $d$  の値は

$$a_1 = \boxed{\text{セ}}, \quad d = \boxed{\text{ソ}}$$

であるから, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{タ}}n + \boxed{\text{チ}}$$

である。

## 第2問 (配点 25)

関数  $f(x) = x^2 - 5|x| - x + 5$  のグラフを  $C: y = f(x)$  とする。

(1) 関数  $f(x)$  は

$$x = \boxed{\text{ア}} \text{ のとき, 最小値 } \boxed{\text{イウ}}$$

をとる。

(2) グラフ  $C$  と直線  $y = 5$  で囲まれた 2 つの部分の面積を  $S_1, S_2$  とおく。  $S_1 < S_2$  とすると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}, S_2 = \boxed{\text{キク}}$$

である。

(3)  $C$  上の点  $(t, f(t))$  ( $t > 0$ ) における接線を  $l$  とおくと,  $l$  の方程式は

$$y = \left( \boxed{\text{ケ}} t - \boxed{\text{コ}} \right) x - t^2 + \boxed{\text{サ}}$$

である。  $C$  と接線  $l$  が  $x < 0$  の部分で接するとき, 接点の座標は

$$\left( \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}, \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \right)$$

である。

(4) (3) のとき, グラフ  $C$  と接線  $l$  で囲まれた部分の面積は  $\frac{\boxed{\text{チツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$  である。

### 第3問 (配点 25)

赤玉 1 個，白玉 2 個が入った袋から 1 個の玉を取り出し，取り出した玉の色を確認して袋に戻すという操作を繰り返す。そのとき，赤玉が 2 回出たところで操作を終了する。たとえば，白，白，赤，白，赤と出た場合は 5 回目に操作を終了する。

(1) 2 回目に終了する確率は  $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ ，3 回目に終了する確率は  $\frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$  である。

(2) 4 回の操作が行われるのは

(a) 4 回のうち赤玉を取り出す回数が 0，1 のいずれかの場合

(b) 4 回目に，ちょうど 2 回目の赤玉を取り出す場合

のいずれかで，その確率はそれぞれ

(a)  $\frac{\text{カキ}}{\text{クケ}}$ ， (b)  $\frac{\text{コ}}{\text{サシ}}$

であるから，操作が 4 回以上行われる確率は  $\frac{\text{スセ}}{\text{ソタ}}$  である。

(3) 操作が 5 回以上行われる確率は  $\frac{\text{チツ}}{\text{テト}}$  である。

## 第4問 (配点 25)

四面体 OABC において,

$$OA = 3, OB = 4, OC = 5, \angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$$

とする。

- (1) 辺 AB の長さと, 三角形 OAB の面積は

$$AB = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}, \triangle OAB = \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

- (2) ベクトル  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  について, 内積の値は

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{\text{オ}}, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{\text{カキ}}$$

である。

- (3) 頂点 C から平面 OAB に下ろした垂線の足を P とおく。  $\overrightarrow{OP}$  を

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} \quad (x, y \text{ は実数の定数})$$

と表すと

$$\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OA} \text{ より } \boxed{\text{ク}}x + \boxed{\text{ケ}}y = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OB} \text{ より } \boxed{\text{コ}}x + \boxed{\text{サ}}y = \boxed{\text{シ}}$$

が成り立つ。

(4) (3)において、点Pが辺AB上にあるとき

$$x + y = \boxed{\text{ス}}$$

であるから

$$x = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad y = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

であり、 $\angle COA = \theta$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。

## 〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2  $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$  に  $-\frac{4}{5}$  と答えたいときは,  $\frac{-4}{5}$  として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば,  $\sqrt{\text{コサ}}$  ,  $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$  に  $4\sqrt{2}$  ,  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  と答えるところを,  $2\sqrt{8}$  ,  $\frac{\sqrt{52}}{4}$  のように答えてはいけません。