2014年度

④　数　　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから７ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　学

（全　問　必　答）

第1問 （配点　25）

(1)　$x^2 - 3x + 1 = 0$ のとき，

$$x + \frac{1}{x} = \boxed{\text{ア}},\quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \boxed{\text{イ}},\quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2)　a を実数の定数とする。2次方程式 $x^2 + ax + a + 3 = 0$ が互いに異なる2つの実数解をもつ a の値の範囲は

$$a < \boxed{\text{オカ}},\quad \boxed{\text{キ}} < a$$

である。また，互いに異なる2つの解がともに正である a の値の範囲は

$$\boxed{\text{クケ}} < a < \boxed{\text{コサ}}$$

である。

(3)　1つのさいころを続けて3回投げるとき，3回とも同じ目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$，ちょうど2回だけ同じ目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(4)　放物線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

第2問 （配点　25）

座標平面上に，円 $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 5 = 0$ と直線 $l : x - 2y + k = 0$ があり，C と l は共有点をもつとする。ただし，k は実数の定数である。

(1)　円 C の中心の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，半径は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　定数 k の値の範囲は

$$\boxed{\text{オカ}} \leqq k \leqq \boxed{\text{キク}}$$

であり，C と l が接するときの接点の座標は

$$k = \boxed{\text{オカ}} \text{ のとき} \quad \left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$$

$$k = \boxed{\text{キク}} \text{ のとき} \quad \left(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$$

である。

(3)　円 C の中心を C とし，円 C と直線 l の共有点を P，Q とする。このとき，△CPQ の面積が最大になるのは

$$k = \boxed{\text{ス}} \pm \boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

のときで，△CPQ の面積は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

第3問 （配点　25）

3次関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l とする。

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\,x^2-\boxed{\text{イ}}\,x$$

である。また，$f(x)$ の極値は

$$\text{極大値}：f\left(\boxed{\text{ウ}}\right)=\boxed{\text{エ}},\quad \text{極小値}：f\left(\boxed{\text{オ}}\right)=\boxed{\text{カ}}$$

であるから，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$（k は定数）が異なる3点で交わるとき，定数 k の値の範囲は

$$\boxed{\text{キ}}<k<\boxed{\text{ク}}$$

である。

(2) l の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ケ}}\,t^2-\boxed{\text{コ}}\,t\right)x-\boxed{\text{サ}}\,t^3+\boxed{\text{シ}}\,t^2+\boxed{\text{ス}}$$

である。

(3)　x 軸上の点 A $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y = f(x)$ と接する直線が，ちょうど 2 本だけ存在する定数 a は 3 つある。この a の値を小さい順に求めると，

$$\boxed{\text{セソ}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}},\ \boxed{\text{ツ}}$$

となる。

第4問 （配点　25）

数列 $\{a_n\}$ が，関係式

$$a_1 = 7,\ a_{n+1} = pa_n + 6 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしている。

(1) $p = 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は公差 $\boxed{\text{ア}}$ の等差数列であるから，一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{イ}}\, n + \boxed{\text{ウ}}$$

であり，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{エ}}\, n^2 + \boxed{\text{オ}}\, n$$

である。また，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2$ は

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 = \boxed{\text{カキ}}\, n^3 + \boxed{\text{クケ}}\, n^2 + \boxed{\text{コサ}}\, n$$

である。

(2) $p = -2$ のとき，関係式は

$$a_{n+1} - \boxed{\text{シ}} = -2\left(a_n - \boxed{\text{シ}}\right)$$

と表されるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}}\left(\boxed{\text{ソタ}}\right)^{n-1}$$

である。また，$|a_n|$ が 200 以上の値をとる最小の自然数 n の値は

$$n = \boxed{\text{チ}}$$

である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)，数字(0～9)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83 と答えたいとき

ア	⊖	±	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	±	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊖	±	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	⊖	±	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ク	⊖	±	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ケ	⊖	±	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。