

2014年度

③ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから6ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

(1) $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 6$ のとき,

$$x^3 + y^3 = \boxed{\text{アイ}}, \quad x^4 + y^4 = \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2) $\tan \theta = 2$ のとき,

$$\cos^2 \theta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \quad \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} = \boxed{\text{キク}}$$

である。

(3) 方程式 $\log_2(x - 2) + \log_2(x + 1) = 2$ の解は

$$x = \boxed{\text{ケ}}$$

である。また、不等式 $\log_2(x - 2) + \log_2(x + 1) < 2$ の解は

$$\boxed{\text{コ}} < x < \boxed{\text{サ}}$$

である。

(4) 公比が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ において,

$$a_2 + a_3 + a_4 = 78, \quad a_4 + a_5 + a_6 = 702$$

が成り立つとする。このとき、初項 a_1 および公比 r の値は

$$a_1 = \boxed{\text{シ}}, \quad r = \boxed{\text{ス}}$$

である。

第2問 (配点 25)

2次関数 $f(x) = x^2 - 6x + 8$ を考える。

(1) $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x) dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} x^3 - \boxed{\text{ウ}} x^2 + \boxed{\text{エ}} x + C$$

である。ただし、 C は積分定数である。

(2) xy 平面上で、放物線 $P: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を l とする。

l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{オ}} t - \boxed{\text{カ}} \right) x - t^2 + \boxed{\text{キ}}$$

である。とくに、 l が x 軸と平行になるとき、 t の値は

$$t = \boxed{\text{ク}}$$

であり、放物線 P と l および y 軸とで囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(3) 点 $(4, -4)$ から放物線 P へ2本の接線を引き、その接点を $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ とする。 $a < b$ とすると、

$$a = \boxed{\text{コ}}, b = \boxed{\text{サ}}$$

であり、直線 AB の方程式は、

$$y = \boxed{\text{シ}} x - \boxed{\text{ス}}$$

である。また、放物線 P と直線 AB とで囲まれる部分の面積は $\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

第3問 (配点 25)

数直線上の点 P を、さいころを投げて出た目の次のような条件によって移動させる。

1 の目または 6 の目のとき、正の方向に 2 だけ移動させる。

2 の目または 5 の目のとき、正の方向に 1 だけ移動させる。

3 の目または 4 の目のとき、負の方向に 2 だけ移動させる。

このとき、さいころを n 回投げ、投げ終わったとき点 P が最初の位置に戻っている確率を p_n とする。

(1) あきらかに $p_1 = 0$ である。また、

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad p_3 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad p_4 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。

(2) n 回の試行のうち、1 の目または 6 の目が a 回、2 の目または 5 の目が b 回、3 の目または 4 の目が c 回とする。点 P が最初の位置に戻るのは

$$a + b + c = n, \quad \boxed{\text{ク}} a + b - \boxed{\text{ケ}} c = 0$$

となる場合であり、 a, b を c, n で表すと、

$$a = \boxed{\text{コ}} c - n, \quad b = \boxed{\text{サシ}} c + \boxed{\text{ス}} n$$

である。

(3) $p_6 = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチツ}}}$ である。

第4問 (配点 25)

1 辺の長さが 2 の正四面体 $OABC$ を T とする。

- (1) T の表面積, 体積, 内接球の半径を, それぞれ S, V, r とおくと,

$$S = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \quad V = \frac{\boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}, \quad r = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

- (2) T において, $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とおくと, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{ク}}$$

である。

- (3) 辺 AB を $1:2$ に内分する点を D とおくと,

$$\vec{OD} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \vec{b}, \quad |\vec{OD}| = \frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり,

$$\cos \angle COD = \frac{\boxed{\text{タ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$$

である。

————— 〈解答上の注意〉 —————

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\text{コサ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。