

2013年度

⑤ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから6ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

- (1) a, b を実数の定数とする。 x についての不等式

$$x^2 - (a + 2)x + a^2 - 3 < 0$$

の解が $a < x < b$ であるとき,

$$a = \boxed{\text{アイ}}, b = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

- (2) 実数係数の3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 7 = 0$ の3つの解が

$$-2 - \sqrt{3}i, -2 + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}i, \boxed{\text{オ}}$$

のとき,

$$a = \boxed{\text{カ}}, b = \boxed{\text{キ}}$$

である。ただし、 i は虚数単位である。

(3) 関数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2$ は

$$f(x) = \boxed{\text{ク}} \sin \left(x + \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} \right) + 2$$

と表すことができ、 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $f(x)$ は

$$x = \frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} \text{ で最大値 } \boxed{\text{サ}}$$

をとる。

第2問 (配点 25)

座標平面上に

$$2x + 3y - 12 \geq 0, \quad x - 2y + 8 \geq 0, \quad 3x + y - 18 \leq 0,$$

で表される領域 D がある。

- (1) 2直線 $x - 2y + 8 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ の交点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}} \right)$$

である。また、領域 D の面積は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

- (2) 点 (x, y) が領域 D の範囲を動くとき、 $3x + 5y$ は

$$(x, y) = \left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}} \right) \text{ のとき最大値 } \boxed{\text{キク}}$$

をとり、

$$(x, y) = \left(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}} \right) \text{ のとき最小値 } \boxed{\text{サシ}}$$

をとる。

- (3) 点 (x, y) が領域 D の範囲を動くとき、 $x^2 + 6y$ は

$$(x, y) = \left(\boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}} \right) \text{ のとき最大値 } \boxed{\text{ソタ}}$$

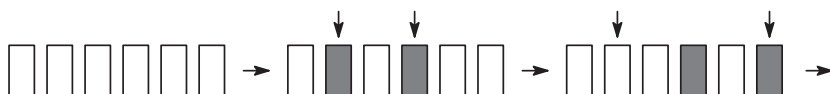
をとり、

$$(x, y) = \left(\boxed{\text{チ}}, \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \right) \text{ のとき最小値 } \boxed{\text{トナ}}$$

をとる。

第3問 (配点 25)

表が白、裏が黒で塗られた6枚のカードが一行に並べられている。これら6枚のカードから無作為に2枚のカードを取り出し裏表を入替える。たとえば、1回目は2枚目と4枚目を入替え、続けて2回目は2枚目と6枚目を入替えると、下の図のようになる。



はじめ6枚のカードはすべて白の面が置かれているとする。

- (1) 1回目の操作では必ず2枚の黒の面があるが、これらの黒の面が隣り合わない確

率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

- (2) 2回目の操作で6枚とも白の面である確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$, 2枚だけが黒の面であ

る確率は $\frac{\text{カ}}{\text{キク}}$ である。

また、黒の面の数の期待値は $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ である。

- (3) 3回目の操作で2枚だけが黒の面である確率は $\frac{\text{サシ}}{\text{スセ}}$ である。

第4問 (配点 25)

関数 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ を考える。

- (1) 曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(s, f(s))$ における接線を l とする。 l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{アイ}} s + \boxed{\text{ウ}} \right) x + s^2 + \boxed{\text{エ}}$$

である。 $s = 2$ のとき、 C と l および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 、 C と l および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とおくと、

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}, \quad S_2 = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

- (2) 座標空間に、5点 $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $P(t, f(t), 0)$, $Q(0, 0, 3-t)$ をとる。ただし、 $0 < t < 3$ である。四角形 $OAPB$ の面積を $T(t)$ とおくと、

$$T(t) = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \left(-t^2 + \boxed{\text{シ}} t + \boxed{\text{ス}} \right)$$

であるから、四角錐 $Q-OAPB$ の体積を $V(t)$ とおくと、

$$V(t) = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} (3-t)T(t)$$

したがって、 $V(t)$ は

$$t = \boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チ}}} \text{ のとき最大値 } \frac{\boxed{\text{ツ}} + \boxed{\text{テ}} \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

をとる。

〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(－, 土), 数字(0～9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に－83 と答えたいとき

ア	☒ ー ☐ 土 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
イ	☐ ー ☐ 土 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒ 8 ☐ 9
ウ	☐ ー ☐ 土 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。
符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 キク
ケ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	☒ ー ☐ 土 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
ク	☐ ー ☐ 土 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
ケ	☐ ー ☐ 土 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, コ $\sqrt{\text{サ}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところ
を, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。