2013年度

④　数　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから８ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問 (配点　25)

(1)　a を定数とする。2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + a$ の $-3 \leqq x \leqq 3$ における最大値を M，最小値を m とおくと，

$$M - m = \boxed{\text{アイ}}$$

である。また，$M + m = 1$ となるのは $a = \boxed{\text{ウエ}}$ のときである。

(2)　円 $C : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ の

中心の座標は $\left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}\right)$，半径は $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$

である。また，原点において円 C に接する直線の方程式は

$$\boxed{\text{ク}}\,x + y = 0$$

である。

(3)　不等式 $2\log_3(x+1) < \log_3(x-1) + 2$ の解は

$$\boxed{\text{ケ}} < x < \boxed{\text{コ}}$$

である。

(4)　袋A，Bがあり，Aには赤球2個，白球4個，Bには赤球3個，白球3個が入っている。おのおのの袋から2個ずつ，合わせて4個を取り出すとき，

(i)　取り出した4個がすべて赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

(ii)　取り出した4個が赤球，白球2個ずつである確率は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

第２問 （配点　25）

座標平面上に３点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(\sqrt{3}\cos\theta,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ \sin\theta)\quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

をとる。

⑴　線分 AB の長さのとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} \leqq \mathrm{AB} \leqq \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

⑵　三角形 OAB の面積は

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\quad \text{のとき最大値}\quad \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

をとる。

⑶　折れ線 OA ＋ OB の長さは

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\quad \text{のとき最大値}\quad \boxed{\text{キ}}$$

をとる。

(4) $\mathrm{OA}^2+\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}+\mathrm{OB}^2$ を $f(\theta)$ とおくと，

$$f(\theta)=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\sin 2\theta+\boxed{\text{コ}}\cos 2\theta\right)+\boxed{\text{サ}}$$

であるから，$f(\theta)$ の最大値と最小値は

$$\text{最大値：}\frac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}},\ \text{最小値：}\boxed{\text{ソ}}$$

である。

第３問 （配点　25）

放物線 $C : y = -x^2 + 2x$ と直線 $l : y = a \ (0 < a < 1)$ の共有点を $(s,\ a)$，$(t,\ a)\ (s < t)$ とする。

(1) 放物線 C の軸は直線 $x = \boxed{\text{ア}}$ であり，a，t を s で表すと，

$$a = -s^2 + 2s,\ t = \boxed{\text{イ}} - s$$

である。

(2) 放物線 C，直線 l および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とおくと，

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} s^3 + s^2$$

である。また，放物線 C，直線 l で囲まれた部分の面積を S_2 とおくと，

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \left(\boxed{\text{ク}} - s \right)^3$$

である。

(3)　(2)において，$f(s) = S_1 + S_2$ とおくと，

$$f(s) = \boxed{\text{ケコ}}\,s^3 + \boxed{\text{サ}}\,s^2 - \boxed{\text{シ}}\,s + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

であるから，

$$f'(s) = \boxed{\text{ソタ}}\left(s - \boxed{\text{チ}}\right)\left(\boxed{\text{ツ}}\,s - \boxed{\text{テ}}\right)$$

となる。したがって，$f(s) = S_1 + S_2$ が最小値をとるとき，

$$s = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad a = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

第4問 （配点　25）

初項 $a_1 = 5$，公差 6 の等差数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　一般項 a_n および初項から第 n 項までの和 S_n は

$$a_n = \boxed{\text{ア}}\, n - \boxed{\text{イ}},\quad S_n = \boxed{\text{ウ}}\, n^2 + \boxed{\text{エ}}\, n$$

である。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を n の式で表すと

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = \boxed{\text{オカ}}\, n^3 + \boxed{\text{キク}}\, n^2 + \boxed{\text{ケコ}}\, n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n}{\boxed{\text{サシ}}\, n + \boxed{\text{スセ}}}$$

である。

(3)　恒等式

$$k \cdot 2^{k-1} = k \cdot 2^k - (k-1) \cdot 2^{k-1} - 2^{k-1}$$

において，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = \left(n - \boxed{\text{ソ}}\right) \cdot 2^n + \boxed{\text{タ}}$$

となる。これを利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 2^{k-1}$ を求めると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 2^{k-1} = \left(\boxed{\text{チ}}\, n - \boxed{\text{ツ}}\right) \cdot 2^n + \boxed{\text{テ}}$$

である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)，数字(０～９)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例１　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	● ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ● ⑨
ウ	⊖ ± ⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例２　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	● ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ● ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。