2013年度

③　数　　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから７ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　　学

（全　問　必　答）

第1問　（配点　25）

⑴　a を定数とし，連立方程式 $\begin{cases} ax - 2y = a + 1 \\ x + (a-3)y = 2a \end{cases}$ ……（＊）を考える。

（i）　$a = 7$ のとき，（＊）の解は $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である。

（ii）（＊）が無数の解をもつのは $a = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。

⑵　グラフ C は，放物線 $y = 2x^2$ を平行移動したもので，2 点（4，10），（−3，24）を通るという。C の方程式は

$$y = 2x^2 - \boxed{\text{エ}}\,x - \boxed{\text{オ}}$$

であり，C が x 軸から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{カ}}$ である。

⑶　三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = 4\sqrt{2}$，$\mathrm{AC} = 5$，$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ とすると，辺 BC の長さと三角形 ABC の面積は

$$\mathrm{BC} = \sqrt{\boxed{\text{キク}}},\quad \triangle\mathrm{ABC} = \boxed{\text{ケコ}}$$

である。

(4) 放物線 $C : y = x^2 + 5$ 上の点 $(2,\ 9)$ における接線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{サ}}\, x + \boxed{\text{シ}}$$

である。また，C と l および y 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

第2問 （配点　25）

2つの関数 $f(x) = 2^{x-2} + 3$，$g(x) = 2^{-x}$ を考える。

(1)　$f(x)$ について，

$$f(1) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad f(2) = \boxed{\text{ウ}},\quad f(3) = \boxed{\text{エ}}$$

である。また，$f(a) = b$ のとき，a を b で表すと，

$$a = \boxed{\text{オ}} + \log_2\left(b - \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

(2)　$y = g(x)$ のグラフを直線 $x = \boxed{\text{キ}}$ に関して対称移動し，y 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると $y = f(x)$ のグラフに一致する。

(3)　$f(x) = g(x)$ を満たす x の値は，

$$x = \boxed{\text{ケ}} + \log_2\left(\sqrt{\boxed{\text{コサ}}} - \boxed{\text{シ}}\right)$$

である。また，$f(x) + g(x)$ は

$$x = \boxed{\text{ス}} \text{ において，最小値 } \boxed{\text{セ}}$$

をとる。

第3問 （配点　25）

1，2，3，・・・，10 と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ合計 10 枚ある。この中から何枚かを取り出す。

(1) 同時に 2 枚のカードを取り出すとき，取り出し方は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある。このうち，2 枚のカードの数が連続するのは $\boxed{\text{ウ}}$ 通り，少なくとも 1 枚のカードの数が奇数であるのは $\boxed{\text{エオ}}$ 通りある。

(2) 同時に 2 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれたカードの数を a，b（$a < b$）とする。ここで，次のような点数を考える。

$b - a$ が奇数のとき 0 点，$b - a$ が偶数のとき $b - a$ 点

このときの点数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3) 同時に 3 枚のカードを取り出すとき，3 枚のカードの数が連続する確率は

$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$，2 枚だけが連続する確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

第4問 （配点　25）

四面体 OABC において，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 3,\ \mathrm{OC} = 2,\ \angle\mathrm{AOB} = 90^\circ,\ \angle\mathrm{AOC} = 60^\circ$$

とする。また，辺 AB を 1：2 に内分する点を D，3 点 O，A，B の定める平面に点 C から下ろした垂線の足を H とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boxed{\text{ア}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{\text{イ}}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

(2) 点 H が直線 OD 上にあるとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$（$k$ は実数）とおけるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{\boxed{\text{キ}}\,k}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である。$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に直交するから，k と $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値は

$$k = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(3)　(2)のとき，四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)，数字(０～９)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例１　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83 と答えたいとき

ア	● ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
イ	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 ● 9
ウ	－ ± 0 1 2 ● 4 5 6 7 8 9

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例２　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	● ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ク	－ ± 0 1 2 3 ● 5 6 7 8 9
ケ	－ ± 0 1 2 3 4 ● 6 7 8 9

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。