

2012年度

⑤ 数 学

(100点 60分)

〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから6ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
 - ② 受験番号欄
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

数 学

(全 問 必 答)

第1問 (配点 25)

- (1) 関数 $f(x) = 4^x - 2^x - 6$ を考える。方程式 $f(x) = 0$ の解は

$$x = \log_2 \boxed{\text{ア}}$$

である。また、 $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{イウ}} \text{ で最小値 } -\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

をとる。

- (2) 3 辺の長さが x , $x + 1$, $7 - x$ の三角形がある。 x の値の範囲は

$$\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}}$$

である。また、この三角形が鋭角三角形になる x の値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} - \boxed{\text{サ}} < x < \boxed{\text{シ}}$$

である。

(3) 座標空間に4点

$$O(0, 0, 0), A(1, 3, 0), B(2, 1, 0), C(1, 2, 2)$$

がある。内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ の値と、三角形 OAB の面積は

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \boxed{\text{ス}}, \triangle OAB = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり、四面体 OABC の体積は

$$(\text{四面体 OABC}) = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

第2問 (配点 25)

a は $a > 0$ を満たす定数とする。3次関数

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a+2)x + 6a$$

を考える。

(1) $a = 3$ のとき

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$$

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 - \boxed{\text{イウ}} x + \boxed{\text{エオ}}$$

であるから、 $f(x)$ は

$$x = \boxed{\text{カ}} \text{ で極大値 } \boxed{\text{キク}}$$

$$x = \boxed{\text{ケ}} \text{ で極小値 } \boxed{\text{コサ}}$$

をとる。したがって、 $f(x) = 0$ を満たす x は $\boxed{\text{シ}}$ 個ある。

(2) $f(x)$ が極値をもつ a の値の範囲は

$$a > \boxed{\text{ス}}$$

である。また、極大値と極小値の差が4のとき、

$$a = \frac{\boxed{\text{セ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

第3問 (配点 25)

ひとつのさいころを3回投げるとき、1回目に出た目を a 、2回目に出た目を b 、3回目に出た目を c とする。

(1) 3回の目の出方は

アイウ

 通りある。このうち、

(i) a が5、 b と c は任意となる目の出方は

エオ

 通りである。

(ii) 積 ab が5の倍数、 c は任意となる目の出方は

カキ

 通りである。

(iii) 積 abc が5の倍数となる目の出方は

クケ

 通りである。

(2) a, b, c に対して、次のような値 X を定める。

① a, b, c の少なくとも2つが同じ値をとるとき $X = 0$ とする。

② a, b, c が互いに異なる値をとるとき、そのうちの最小の値 k に対して $X = k$ とする ($k = 1, 2, 3, 4$)。

(i) $X = 1$ となる確率は

コ
サシ

 , $X = 2$ となる確率は

ス
セ

 である。

(ii) X の期待値は

ソタ
チツ

 である。

第4問 (配点 25)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は、次のように定義されている。

$$a_1 = 12, a_{n+1} = 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 9, b_{n+1} = 3b_n - 2n - 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 数列 $\{a_n\}$ は公比 $\boxed{\text{ア}}$ の等比数列であるから、一般項は

$$a_n = \boxed{\text{イ}} \cdot \boxed{\text{ウ}}^n$$

初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n a_k = \boxed{\text{エ}} \cdot \boxed{\text{オ}}^{n+1} - \boxed{\text{カ}}$$

である。

- (2) 数列 $\{b_n\}$ に対して

$$c_n = b_n - (n + \boxed{\text{キ}}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくと、数列 $\{c_n\}$ は公比 $\boxed{\text{ク}}$ の等比数列となるから、 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ケ}} \cdot \boxed{\text{コ}}^n + n + \boxed{\text{サ}}$$

初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n b_k = \boxed{\text{シ}}^{n+1} + \frac{1}{\boxed{\text{ス}}} n (n + \boxed{\text{セ}}) - \boxed{\text{ソ}}$$

である。

————— 〈解答上の注意〉 —————

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ⊕ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば, $\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}$, $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ に $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。