2008年度

④　数　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから７ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　　学

(全　問　必　答)

第1問　(配点　25)

(1)　2次方程式 $2x^2 - 7x - 3 = 0$ の正の解を α とおくと

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であるから，$m < \alpha < m + 1$ を満たす整数の値 m は

$$m = \boxed{\text{オ}}$$

である。

(2)　鋭角三角形ABCにおいて $\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = 4$ とすると，辺CAの長さの範囲は

$$\boxed{\text{カ}} < \mathrm{CA} < \sqrt{\boxed{\text{キク}}}$$

である。さらに，三角形ABCの面積が8であるとき

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\quad \mathrm{CA} = \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。

(3)　方程式 $\log_2(3x+1)+\log_2(x-1)=6$ の解は

$$x = \boxed{\text{ス}}$$

であり，不等式 $\log_2(3x+1)+\log_2(x-1)<6$ の解は

$$\boxed{\text{セ}} < x < \boxed{\text{ソ}}$$

である。

(4)　xy 平面上に 2 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 6)$ がある。O，A の中点を通り OA に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}x + \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。また，線分の長さの比が OP：AP ＝ 2：1 を満たす点 P が描く円の方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{ニ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{ヌ}}\right)^2 = \boxed{\text{ネノ}}$$

である。

第２問　（配点　25）

９個の整数１，２，３，４，５，６，７，８，９がある。

(1)　１個の数を取り出し数を確認して元にもどす。この試行を３回繰り返すとき

３回とも３の倍数の数を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$

３の倍数の数を２回，３の倍数でない数を１回取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$

３の倍数の数を１回，３の倍数でない数を２回取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$

である。したがって，３の倍数の数を取り出す個数の期待値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(2)　同時に３個の数を取り出すとき，取り出し方の総数は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。このうち

３個とも３の倍数の数を取り出す方法は $\boxed{\text{サ}}$ 通り
３の倍数の数を２個，３の倍数でない数を１個取り出す方法は $\boxed{\text{シス}}$ 通り
３の倍数の数を１個，３の倍数でない数を２個取り出す方法は $\boxed{\text{セソ}}$ 通り

である。したがって，３の倍数の数を取り出す個数の期待値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

第 3 問　（配点　25）

二つの関数

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$g(x) = x^2 - x - 1 \quad \cdots\cdots ②$$

を考える。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 - \boxed{\text{イ}}\,x - \boxed{\text{ウ}}$$

であり，$f(x)$ は

$$x = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \text{において極大値} \quad \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

および

$$x = \boxed{\text{サ}} \quad \text{において極小値} \quad \boxed{\text{シ}}$$

をとる。

(2)　$f(x)$，$g(x)$ に対して

$$f(x) - xg(x) = \boxed{\text{ス}}$$

が成り立つから，方程式 $f(x) - (x+1)g(x) = 0$ の解は

$$x = \boxed{\text{セソ}} \quad \text{または} \quad x = \boxed{\text{タ}}$$

である。

（数学第 3 問は次ページに続く。）

(3)　二つの曲線 $y=f(x)$，$y=(x+1)g(x)$ で囲まれた部分の面積を S とおくと

$$S=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

第 4 問 （配点　25）

初項 1，公差 6 の等差数列 $\{a_n\}$，初項 14，公差 12 の等差数列 $\{b_n\}$ がある。

(1)　数列の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ア}}\,n - \boxed{\text{イ}},\quad b_n = \boxed{\text{ウエ}}\,n + \boxed{\text{オ}}$$

初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{カ}}\,n^2 - \boxed{\text{キ}}\,n$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{\text{ク}}\,n^2 + \boxed{\text{ケ}}\,n$$

である。

(2)　自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \boxed{\text{コサ}}\,n^3 + \boxed{\text{シス}}\,n^2 - \boxed{\text{セソ}}\,n$$

および

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k} = \frac{n}{\boxed{\text{タチ}}\,n + \boxed{\text{ツ}}}$$

が成り立つ。

(3)　a_n を 12 で割った余りを c_n，b_n を 18 で割った余りを d_n とし，和 S を

$$S = c_1 + d_1 + c_2 + d_2 + c_3 + d_3 + \cdots + c_{60} + d_{60}$$

とおくと，S の値は $\boxed{\text{テトナ}}$ である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)，数字(0～9)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ク	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ケ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。