2008年度

⑤　数　　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから９ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　学

（全　問　必　答）

第1問　（配点　25）

(1)　関数 $f(x) = |2x-3| + |3x-7|$ に対して，$f(x) = 6$ を満たす x の値は

$$x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。また，$f(x)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　連立方程式 $\begin{cases} 3\log_3 x + \log_3 y = 9 \\ (\log_3 x)(\log_3 y) = 6 \end{cases}$ の解は

$$(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケコサ}}\right) \text{ または } \left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{スセ}}\right)$$

である。

(3)　xy 平面上に3点 A$(-2,\ 4)$，B$(1,\ 1)$，C$(3,\ 9)$がある。三角形ABCの重心をG，面積を S とおくと

$$\mathrm{G}\left(\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\ \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right),\ S = \boxed{\text{トナ}}$$

である。

(4) 初項が 33，第 9 項が -7 の等差数列において，公差は $\boxed{\text{ニヌ}}$ である。また，この数列の初項からの和が最大になるのは第 $\boxed{\text{ネ}}$ 項までの和であり，その和の値は $\boxed{\text{ノハヒ}}$ である。

第2問 （配点　25）

三角形ABCにおいて，$AB = 1$，$\angle ABC = \angle BAC + 90°$とする。また，三角形ABCの外接円の半径を$R$，三角形ABCの面積を$S$，角$\angle BAC$を$\angle BAC = \theta$（$0° < \theta < 45°$）とおく。

(1)　次の $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ に当てはまるものを，下の①～⑧のうちから一つずつ選べ。

$\angle BCA = 90° - 2\theta$ より，正弦定理を用いて

$$2R = \boxed{ア}$$

であるから

$$BC = \boxed{イ},\quad CA = \boxed{ウ}$$

である。

①　$\sin 2\theta$　　②　$\cos 2\theta$　　③　$\dfrac{1}{\sin 2\theta}$　　④　$\dfrac{1}{\cos 2\theta}$

⑤　$\dfrac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$　　⑥　$\dfrac{\cos\theta}{\sin 2\theta}$　　⑦　$\dfrac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$　　⑧　$\dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$

(2)　$R = 3$ のとき

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}},\quad \cos 2\theta = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

であるから

$$S = \frac{\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$$

である。

(3)　$S = \dfrac{3}{5}$ のとき

$$\sin 2\theta = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}},\quad \cos 2\theta = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

であるから

$$R = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

第3問　（配点　25）

5 個の赤球，10 個の白球がある。5 個の赤球にはそれぞれ 1，2，3，4，5 の数が書かれており，10 個の白球には 0 の数が書かれている。これらの 15 個の球を袋に入れ，その中から何個かの球を 1 回取り出す。

(1)　1 個の球を取り出すとき，赤球を取り出す確率，白球を取り出す確率は，それぞれ

$$赤球 \quad \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}, \quad 白球 \quad \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である。

(2)　2 個の球を取り出すとき，2 個とも赤球を取り出す確率，2 個とも白球を取り出す確率は，それぞれ

$$2個とも赤球 \quad \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}, \quad 2個とも白球 \quad \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

である。

(3)　3 個の球を取り出し，それぞれの球に書かれた 3 個の数のうちの最大の値を得点とする。得点が 0 となるのは，3 個とも白球を取り出す場合で，その確率は

$$得点 0 \quad \frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シス}}$$

である。得点が 5 となるのは，5 の赤球を取り出せば他の 2 個は任意でよいから，その確率は

$$得点 5 \quad \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

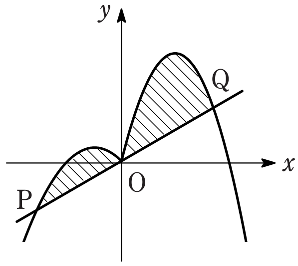
である。また，この得点の期待値は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

第4問 （配点　25）

関数 $y = f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+1) & (x \leqq 0) \\ -2x(x-2) & (x \geqq 0) \end{cases}$$

によって定義する。直線 $y = ax$ が $y = f(x)$ のグラフと原点Oと異なる2点P，Qと交わっている。ただし，P，Qの x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とおくと，$x_1 < 0 < x_2$ である。



(1)　x_1，x_2 を a で表すと

$$x_1 = -a - \boxed{\text{ア}},\quad x_2 = -\frac{a}{\boxed{\text{イ}}} + \boxed{\text{ウ}}$$

であり，$x_1 < 0 < x_2$ より，a の値の範囲は

$$\boxed{\text{エオ}} < a < \boxed{\text{カ}}$$

である。

(2)　$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = ax$ で囲まれる部分で，線分OPで囲まれる部分の面積を S_1，線分OQで囲まれる部分の面積を S_2 とおくと

$$S_1 = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}\left(a + \boxed{\text{ク}}\right)^3$$

$$S_2 = \frac{1}{\boxed{\text{ケコ}}}\left(\boxed{\text{サ}} - a\right)^3$$

である。

(3)　(2)で求めたS_1，S_2に対して，$S(a) = S_1 + S_2$とおくと，$S(a)$の導関数$S'(a)$は

$$S'(a) = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}a^2 + \boxed{\text{セ}}\,a - \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

となり，$S(a)$が最小になるaの値は$a = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)，数字(0～9)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83 と答えたいとき

ア	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
イ	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ウ	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例 2　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ク	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ケ	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。