2008年度

⑥　数　　学

（100点　60分）

〈注　意　事　項〉

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　問題は２ページから５ページまでです。全問解答しなさい。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**氏名欄**

氏名・フリガナを**記入**しなさい。

②　**受験番号欄**

受験番号(数字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

5　**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

〈解答上の注意〉

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

数　　学

（全　問　必　答）

第1問 （配点　30）

⑴　2次方程式 $x^2 - 2ax + 8a - 15 = 0$ が，互いに異なる二つの実数解 α，β をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲は $a < \boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}} < a$ である。さらに，$\alpha^2 + \beta^2 = 30$ を満たす a の値は $a = \boxed{\text{ウ}}$ である。

⑵　A，B，C と区別された三つの箱に6個のボールを入れる方法は何通りあるかを考える。1から6まで異なる番号のついたボールを入れる場合は $\boxed{\text{エオカ}}$ 通りある。また，互いに区別のつかない6個のボールを入れる場合は $\boxed{\text{キク}}$ 通りある。ただし，1個のボールも入らない箱があってもよいものとする。

⑶　袋の中に白球4個，赤球2個，計6個の球が入っている。この中から3個の球を無作為に取り出すとき，白球2個，赤球1個を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。また，取り出す白球の個数の期待値は $\boxed{\text{サ}}$ である。

⑷　三角形ABCにおいて $\mathrm{BC} = 7$，$\mathrm{CA} = 10$，$\mathrm{AB} = 13$ とすると

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}},\quad \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$$

であるから，面積を S，内接の半径の長さを r とおくと

$$S = \boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}},\quad r = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。

第2問 （配点　30）

(1)　xy 平面上の不等式領域 $D : x^2 + y^2 \leqq 20$，$x + 2y \geqq 0$，$2x - y \geqq 0$ の面積は $\boxed{\text{ア}}\,\pi$ であり，点$(x,\ y)$が D を動くとき，$2x + y$ の最大値は $\boxed{\text{イウ}}$ である。

(2)　関数 $f(x) = \log_4 x + \log_x 64$ を考える。$f(x) = \dfrac{7}{2}$ を満たす x の値は

$$x = \boxed{\text{エ}} \quad \text{または} \quad x = \boxed{\text{オカ}}$$

である。次に，$x > 1$ のとき，$f(x)$ の最小値は $f(x) = \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3)　関数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x + 1$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ に対して，$f(0) = \boxed{\text{ケ}}$ である。また

$$f(x) = \boxed{\text{コ}}\sin\left(x + \frac{\pi}{\boxed{\text{サ}}}\right) + \boxed{\text{シ}}$$

であるから，$f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ において最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

(4)　$a_1 = 4$，$a_{n+1} = 2a_n - 5$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定義された数列 $\{a_n\}$ において，一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}}^{\,n-1}$$

であり，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{チ}}\,n + \boxed{\text{ツ}} - \boxed{\text{テ}}^{\,n}$$

である。

第3問 （配点　20）

放物線 $C : y = -x^2 + 2x + 3$ に点$(2,\ 7)$から引いた2本の接線を l_1，l_2 とおく。ただし，l_1 の傾きは正，l_2 の傾きは負とする。さらに，C と l_1，C と l_2 の接点をそれぞれ P_1，P_2 とおく。

(1)　一般に，C 上の点$(t,\ -t^2 + 2t + 3)$（t は実数)における接線の方程式は

$$y = \left(-\boxed{\text{ア}}\,t + \boxed{\text{イ}}\right)x + t^2 + \boxed{\text{ウ}}$$

である。これを利用して，l_1，l_2 の方程式と P_1，P_2 の座標を求めると

$$l_1 : y = \boxed{\text{エ}}\,x + \boxed{\text{オ}},\ \ \mathrm{P}_1\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$$

$$l_2 : y = -\boxed{\text{ク}}\,x + \boxed{\text{ケコ}},\ \ \mathrm{P}_2\left(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シス}}\right)$$

である。

(2)　C と直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ で囲まれた部分の面積を S，C と2直線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積を T とおくと

$$S = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\ \ T = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

であるから，$S = \boxed{\text{ト}}\,T$ が成り立つ。

第4問　（配点　20）

平面上の三角形OABにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とおくと

$$|\vec{a}|=4,\quad |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17},\ |\vec{a}-2\vec{b}|=6$$

が成り立つものとする。

(1)　ベクトル $|\vec{b}|$ の大きさと内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は

$$|\vec{b}|=\boxed{\text{ア}},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{イ}}$$

であり，ベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθ，三角形OABの面積をSとおくと

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ S=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

(2)　座標平面上で，O(0，0)，A(4，0)とおくと，Bの座標は

$$\mathrm{B}\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

である。ただし，Bの座標はy座標が正の値をとるものとする。

(3)　三角形OABの重心をG，内心(内接円の中心)をIとおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{\text{コ}}},\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{\boxed{\text{サ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{シ}}\,\vec{b}}{\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}$$

である。

〈解答上の注意〉

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号（－，±），数字（０～９）が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例１　$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83 と答えたいとき

ア	● ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
イ	－ ± 0 1 2 3 4 5 6 7 ● 9
ウ	－ ± 0 1 2 ● 4 5 6 7 8 9

2　分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例２　$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

キ	● ± 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ク	－ ± 0 1 2 3 ● 5 6 7 8 9
ケ	－ ± 0 1 2 3 4 ● 6 7 8 9

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ に $4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。