

2021年度

## ⑥ 数 学

(100点 60分)

### 〈注 意 事 項〉

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題は2ページから9ページまでです。全問解答しなさい。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
  - ① 氏名欄  
氏名・フリガナを記入しなさい。
  - ② 受験番号欄  
受験番号(数字)を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。
- 5 正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

### 〈解 答 上 の 注 意〉

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

# 数 学

(全問必答)

## 第1問 (配点 25)

(1)  $x = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ ,  $y = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$  について,

$$x + y = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}} + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \quad x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}} + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

(2) 平行四辺形ABCDにおいて  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 7$  とすると,

$$\cos \angle ABC = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり, 対角線BDの長さとして, 平行四辺形ABCDの面積  $S$  の値は

$$BD = \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}, \quad S = \boxed{\text{サシ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(3) 分数式

$$\frac{x^2 - 2x + 9}{(x + 1)(x - 1)^2} = \frac{a}{x + 1} - \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$$

が  $x$  についての恒等式となる定数  $a$ ,  $b$ ,  $c$  の値は

$$a = \boxed{\text{セ}}, b = \boxed{\text{ソ}}, c = \boxed{\text{タ}}$$

である。

## 第2問 (配点 25)

(1) 関数  $f(\theta) = 3\sin\theta + 4\cos\theta$  の  $0 \leq \theta \leq \pi$  における最大値  $M$  の値は、

$$M = \boxed{\text{ア}}$$

であり、このときの  $\theta$  の値を  $\theta = \alpha$  とおくと、

$$\tan \alpha = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) 関数  $f(x) = (\log_2 x)(\log_4 x) - (\log_2 x + \log_4 x) + 2$  は

$$x = \boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}} \text{ のとき、最小値 } \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

をとる。

(3) ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$  を満たすとき、  
内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。ここで  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  とおくと、三角形 OAB の面積は

$$\triangle OAB = \frac{\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シス}}}$$

である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

### 第3問 (配点 25)

2つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 2$  および

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 2b_n + 2 \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められている。

(1)  $p_n = a_n - b_n$  とおくと,

$$p_{n+1} = \boxed{\text{ア}} p_n + \boxed{\text{イ}}$$

となり, 数列  $\{p_n + \boxed{\text{ウ}}\}$  は公比  $\boxed{\text{エ}}$  の等比数列で,

$$a_n - b_n = \boxed{\text{オ}} \cdot \boxed{\text{カ}}^{n-1} - \boxed{\text{キ}}$$

が成り立つ。

(2) (1)と同様にして,

$$a_n - 2b_n = \boxed{\text{ク}} \cdot \boxed{\text{ケ}}^{n-1} - \boxed{\text{コ}}$$

を得る。

(3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{サ}} \cdot \boxed{\text{シ}}^{n-1} - \boxed{\text{ス}} \cdot \boxed{\text{セ}}^{n-1}$$

であり,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \boxed{\text{ソ}} \cdot \boxed{\text{タ}}^n - \boxed{\text{チ}} \cdot \boxed{\text{ツ}}^n - \boxed{\text{テ}}$$

である。

## 第4問 (配点 25)

関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  について,

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{2}{3}x^3 - (a-3)x^2 + ax + 2a - 8$$

および

$$g(x) = 3x^2 + \int_0^1 (2x+t)g'(t) dt$$

が成り立つとする。ただし,  $a$  は実数の定数である。

(1) 定数  $a$  の値は

$$a = \boxed{\text{ア}}$$

であり,  $f(x)$  は

$$x = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{ のとき, 最小値 } \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

をとる。

(2)  $g(x)$  は  $g(x) = px^2 + qx + r$  と表すことができ, 定数  $p$ ,  $q$ ,  $r$  の値は,

$$p = \boxed{\text{カ}}, q = \boxed{\text{キク}}, r = \boxed{\text{ケコ}}$$

である。



(3) 曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  の交点の  $x$  座標は

$$x = \boxed{\text{サシ}} \quad \text{および} \quad x = \boxed{\text{ス}}$$

であり, 2曲線で囲まれた領域の面積を  $S$  とおくと,

$$S = \boxed{\text{セソ}}$$

である。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

## 〈解答上の注意〉

- 1 問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−, ±), 数字(0~9)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイウ に−83 と答えたいとき

ア	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
イ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ウ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- 2 分数形で解答する場合は, 既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2  $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$  に  $-\frac{4}{5}$  と答えたいときは,  $\frac{-4}{5}$  として

キ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ク	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ケ	⊖ ⊕ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

- 3 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば,  $\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}$  ,  $\frac{\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$  に  $4\sqrt{2}$  ,  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  と答えるところを,  $2\sqrt{8}$  ,  $\frac{\sqrt{52}}{4}$  のように答えてはいけません。